Università degli Studi di Perugia - Corso di Laurea Triennale in Fisica

Corso di

COMPLEMENTI DI FISICA

Prof. Gianluca Grignani

Problem Set 1

1. Partendo dalle equazioni di Maxwell è possibile ricavare l'equazione delle onde la cui soluzione rappresenta le onde elettromagnetiche. L'equazione per il campo elettrico $\mathbf{E}$, in assenza di cariche e correnti, è

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0 \, ,$$

dove c è la velocità della luce. Assumendo che $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E(x, t)\, \hat{z}$

(a) Mostrare che $E(x, t) = f(x \pm ct)$ è soluzione dell'equazione delle onde per ogni funzione f.

(b) Spiegare perché questa soluzione rappresenta un'onda che viaggia verso "sinistra" o verso "destra" (verso x decrescenti o crescenti) con velocità c. Quale segno corrisponde a quale direzione.

(c) Mostrare che l'equazione delle onde non è invariante per trasformazioni galileiane $x' = x + vt$, $t' = t$.

(d) Mostrare che l'equazione delle onde è invece invariante per trasformazioni di Lorentz.

2. Riscrivere le trasformazioni di Lorentz in funzione del *parametro di rapidità* η

$$\eta = \operatorname{arctanh} \beta \, .$$

Si considerino tre sistemi di riferimento inerziali $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$ e $\mathcal{S}''$ con assi paralleli tali che $\mathcal{S}'$ si muova con velocità $\mathbf{v}_1 = v_1 \hat{x}$ rispetto a $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}''$ si muova con velocità $\mathbf{v}_2 = v_2 \hat{x}$ rispetto a $\mathcal{S}'$. Mostrare che $\mathcal{S}''$ e $\mathcal{S}$ sono legati da una trasformazione di Lorentz con velocità

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} \, .$$

(Per ricavare questa formula si usino le trasformazioni di Lorentz in funzione di η ricavate nella prima parte dell'esercizio).

3. Una sbarra di lunghezza propria l_0 in quiete nel sistema di riferimento $\mathcal{S}$ giace nel piano xy formando un angolo $\theta = \arctan(3/4)$ con l'asse x. Un sistema di riferimento $\mathcal{S}'$ con assi paralleli a $\mathcal{S}$ si muove con velocità $\mathbf{v} = v\, \hat{x}$ rispetto a $\mathcal{S}$. In $\mathcal{S}'$ la sbarra forma un angolo di $45°$ con l'asse x'.

(a) Determinare la velocità v.

(b) Qual è la lunghezza l' della sbarra misurata nel sistema $\mathcal{S}'$?

4. Due astronavi, entrambe di lunghezza propria pari a 100 m, passano una vicino all'altra muovendosi in direzione opposta. Un astronauta che si trova nella punta di una delle astronavi misura che il tempo impiegato dall'altra astronave per passarlo è pari a 2.50×10^{-6} s. Qual è la velocità relativa tra le due astronavi? Quanto tempo impiega nel sistema della prima astronave la punta della seconda astronave per passare dalla punta alla fine della prima?

5. In un sistema di riferimento inerziale $\mathcal{S}$ un'asta AB, muovendosi ad una velocità costante v quasi parallela all'asse x, attraversa un'apertura fissa CD di lunghezza L disposta lungo l'asse x (Figura 1). Supponiamo che le estremità dell'asta A e B coincidano con quelle dell'apertura, rispettivamente C e D, all'istante $t = 0$. Nel sistema di riferimento $\mathcal{S}'$ solidale con l'asta la lunghezza dell'apertura è contratta e si potrebbe pensare che l'asta non riesca ad attraversarla. Non è così, perché in $\mathcal{S}'$ l'asta e l'apertura non sono parallele e gli eventi coincidenza di A e C e coincidenza di B e D non sono simultanei. Calcolare le posizioni delle estremità dell'asta e dell'apertura in $\mathcal{S}'$ all'istante $t' = 0$ e illustrare la geometria del sistema in $\mathcal{S}'$ (si scelga come origine dei tempi di $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}'$, $t = t' = 0$, l'istante in cui A coincide con C e come origine spaziale, $O \equiv O'$, il punto in cui A e C si trovano a $t = t' = 0$).

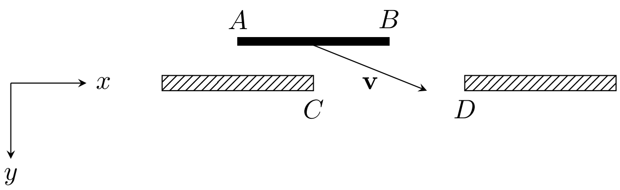

Figura 1

6. Derivare la trasformazione relativistica per l'accelerazione tra due sistemi di riferimento inerziali che si muovono con velocità relativa lungo l'asse-x.

7. Un razzo di lunghezza propria L si allontana dalla terra a velocità costante v. Un segnale radar emesso da una stazione terrestre viene riflesso da due specchi collocati sul razzo a distanza d l'uno dall'altro (vedi Figura 2). La stazione riceve i due segnali di ritorno separati da un intervallo temporale Δt. Determinare la velocità del razzo in funzione di d e Δt.

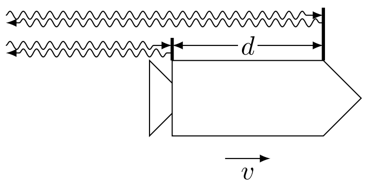

Figura 2

8. Un fascio di pioni (la cui vita media a riposo è $\tau_0 = 2.6 \times 10^{-8}$ s) ha velocità $v = 0.9995\,c$ nel sistema del laboratorio. A quale distanza d dalla sorgente si osserva una frazione $f = 10\%$ dei pioni?

9. Un oggetto si muove a velocità relativistica v lungo l'asse x nel sistema del laboratorio. Lungo tale asse sono marcati dei segni equispaziati ad una distanza d uno dall'altro (misurata nel sistema del laboratorio). Appena l'oggetto raggiunge ciascun segno emette un segnale luminoso che si propaga in avanti lungo l'asse x. Il segnale viene rivelato da un osservatore O che si trova a x molto grande. Con che frequenza ν, espressa in termini di d, v e della velocità della luce c, l'osservatore O riceve i segnali? Si esprima tale frequenza in termini di $\nu_0 = v/d$ e di $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ nel limite $\gamma \gg 1$.

10. Sulla terra una sorgente A emette un segnale luminoso ogni 6 minuti. Un ricevitore B si trova su una stazione spaziale stazionaria rispetto alla terra. C si trova su un razzo che viaggia da A a B con velocità costante $0.6\,c$ rispetto ad A. Che intervallo di tempo misurano B e C tra due segnali consecutivi ricevuti da A? Se C invia un segnale luminoso ogni volta che ne riceve uno da A, con quale intervallo di tempo B riceve i segnali inviati da C?