Università degli Studi di Perugia - Corso di Laurea Triennale in Fisica

Corso di

COMPLEMENTI DI FISICA

Prof. Gianluca Grignani

Problem Set 2

1. Una particella di massa m e carica q, in presenza di un campo elettrico, si trova inizialmente in quiete nel punto 1 a potenziale $V_1 = V$. Qual è la sua velocità nel punto 2 a potenziale $V_2 = 0$? Si supponga che la particella raggiunga velocità relativistiche.

2. (a) Una particella di massa m si muove in un campo di forze uniforme $\boldsymbol{F} = F\hat{\boldsymbol{z}}$. All'istante iniziale $t = 0$ la sua velocità è perpendicolare a $\boldsymbol{F}$ ed è pari a $\boldsymbol{v}_0 = v_0\hat{\boldsymbol{x}}$. Scrivere la legge oraria e l'equazione della traiettoria della particella.
(b) Applicare i risultati del punto (a) al caso di una particella di carica e che entra con velocità iniziale $\boldsymbol{v}_0 = v_0\hat{\boldsymbol{x}}$ in una regione compresa tra $x = 0$ e $x = L$ in cui è presente un campo elettrico uniforme $\boldsymbol{E} = E\hat{\boldsymbol{z}}$. Ricavare la relazione che fornisce la massa m in funzione dell'angolo θ che la velocità della particella forma con una retta parallela all'asse x nel punto in cui la particella esce dalla zona dove è presente il campo elettrico.

3. Una particella di massa m e carica e entra, con velocità iniziale $\boldsymbol{v}_0$, in una regione di spazio in cui è presente un campo magnetico costante diretto lungo l'asse z, $\boldsymbol{B} = B\hat{\boldsymbol{z}}$

(a) Mostrare che il moto risultante è caratterizzato da una velocità di modulo costante.

(b) Integrare le equazioni del moto relativistiche e mostrare che la traiettoria del moto è elicoidale. Ricavare il raggio della circonferenza ottenuta dalla proiezione della traiettoria sul piano xy e il passo dell'elica.

4. Scrivere la lagrangiana di una particella relativistica carica in un campo elettromagnetico in forma covariante.

5. Si consideri il tensore intensità di campo elettromagnetico nel vuoto (in unità di Gauss)

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

e il suo duale $\mathcal{F}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Mostrare che in notazione matriciale si ha

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} &= -\mathrm{Tr}\,(gFgF) \\ \mathcal{F}_{\mu\nu}F^{\mu\nu} &= \mathrm{Tr}\left(g\mathcal{F}gF^T\right) = -\mathrm{Tr}\,(g\mathcal{F}gF) \end{aligned}$$

in cui g è il tensore metrico di Minkowski

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) Usando il risultato di (a) mostrare esplicitamente che tali invarianti relativistici risultano pari a

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} &= -2\left(\boldsymbol{E}^2 - \boldsymbol{B}^2\right) \\ \mathcal{F}_{\mu\nu}F^{\mu\nu} &= -4\,\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B} \end{aligned}$$

6. L'energia di un oscillatore relativistico unidimensionale è

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} + \frac{1}{2}kx^2$$

dove k è la costante elastica. Chiamiamo a la massima elongazione dell' oscillatore ($x = \pm a$ sono i punti di inversione, in corrispondenza dei quali la velocità si annulla) e supponiamo che l'energia potenziale massima sia piccola rispetto all' energia a riposo. Si calcoli il periodo dell' oscillatore al primo ordine in $ka^2/(2mc^2)$.

7. Una particella di massa M decade in due particelle di massa m_1 e m_2. Si analizzi il decadimento nel sistema di quiete della particella M, sistema del centro di massa (o CMS, dall'inglese "center of mass system"). Mostrare che in tale sistema le due particelle prodotte hanno impulso uguale e opposto di modulo pari a

$$p = \frac{c}{2M}\sqrt{\lambda(M^2, m_1^2, m_2^2)}$$

essendo $\lambda(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-2xy-2xz-2yz$ la funzione triangolare. Cosa succede se $M = m_1+m_2$?

8. Le interazioni nucleari deboli fanno decadere un muone μ (di massa m_μ e carica $-e$) in tre particelle

$$\mu \to e + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$$

dove e è un elettrone, $\bar{\nu}_e$ un anti-neutrino elettronico e ν_μ un neutrino muonico. Supponendo che le masse dei neutrini siano nulle, usare la conservazione del quadrimpulso per ricavare il valore massimo possibile per l'energia cinetica dell'elettrone nel sistema di quiete del muone.

9. Mostrare che un fotone che si propaga nel vuoto con energia E_γ ed impulso p_γ non può produrre una coppia elettrone-positrone (e^+e^-), indipendentemente dalla sua energia. Il positrone e^+ ha una massa uguale a quella dell'elettrone $m_ec^2 \simeq 0.5$ MeV.

10. Una particella di massa M decade in due particelle di massa m_1 e m_2.

(a) Usare la conservazione del quadrimpulso e l'invarianza dei prodotti scalari tra quadrivettori per mostrare che l'energia totale di m_1 nel CMS è

$$E_1 = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M}\, c^2$$

(b) Mostrare che l'energia cinetica delle due particelle è data da

$$T_i = c^2 \Delta M \left(1 - \frac{m_i}{M} - \frac{\Delta M}{2M}\right) , \qquad i = 1, 2$$

con $\Delta M = M - (m_1 + m_2)$.