Università degli Studi di Perugia - Corso di Laurea Triennale in Fisica

Corso di

Meccanica Quantistica

Problem Set 2

1. Calcolare gli autovalori e gli autovettori delle due matrici 2×2

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} .$$

2. Trovare la rappresentazione esplicita, sotto forma di matrice 2×2, della funzione della matrice A

$$e^{i\varphi A} \quad \text{dove} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

3. Calcolare gli autovalori e gli autovettori delle due matrici 3×3

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & -4 & 0 \\ 6 & 0 & 6 \end{pmatrix} , \qquad D = \begin{pmatrix} 9 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \end{pmatrix} .$$

4. Se un generico operatore $\hat{A}$ soddisfa alla seguente equazione algebrica

$$\hat{A}^2 = \lambda \hat{A} \quad \text{con} \ \ \lambda \in \mathbb{C} ,$$

dire quali sono i suoi autovalori.

5. Dimostrare che la relazione di commutazione

$$[P, Q] = iI$$

dove I è la matrice unità, non può essere soddisfatta se P e Q sono due matrici di ordine finito.

6. Sia $\lambda \in \mathbb{C}$ un numero complesso con $|\lambda| < 1$, trovare lo sviluppo dell' operatore $(\hat{A} - \lambda\hat{B})^{-1}$, dove $\hat{A}$ e $\hat{B}$ sono due generici operatori, in serie di potenze di λ.

7. Dimostrare la seguente identità operatoriale

$$e^{\hat{A}} \hat{B} e^{-\hat{A}} = \hat{B} + \frac{1}{1!} \left[\hat{A}, \hat{B}\right] + \frac{1}{2!} \left[\hat{A} \left[\hat{A}, \hat{B}\right]\right] + \dots$$

8. Dimostrare le seguenti formule:

a) se $\hat{A}^2 = \lambda^2 \hat{I}$, allora

$$\hat{F}(\hat{A}) = \frac{1}{2} \left[F(\lambda) + F(-\lambda)\right] \hat{I} + \frac{1}{2\lambda} \left[F(\lambda) - F(-\lambda)\right] \hat{A} ,$$

b) se $\hat{A}^2 = \lambda \hat{A}$, allora

$$\hat{F}(\hat{A}) = F(0)\hat{I} + \frac{1}{\lambda} \left[F(\lambda) - F(0)\right] \hat{A} ,$$

dove $\hat{A}$ è un generico operatore, $\hat{I}$ è l'identità, λ è un numero e la funzione $\hat{F}(\hat{A})$ è definita dalla serie

$$\hat{F}(\hat{A}) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \hat{A}^n$$

9. Dimostrare che, se il commutatore di $\hat{A}$ e $\hat{B}$

$$\hat{C} \equiv \left[\hat{A}, \hat{B}\right]$$

commuta con $\hat{B}$, vale la formula

$$\left[\hat{A}, \hat{F}(\hat{B})\right] = \hat{C}\hat{F}'(\hat{B})$$

dove la funzione di operatore $\hat{F}(\hat{B})$ è definita dalla serie di potenze usuale: $\hat{F}(\hat{B}) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \hat{B}^n$ e $\hat{F}'(\hat{B})$ è la derivata, cioè la serie $\hat{F}'(\hat{B}) = \sum_{n=0}^{\infty} n f_n \hat{B}^{n-1}$. Casi particolari: particella in tre dimensioni

$$\left[\hat{f}(\vec{r}), \hat{p}_i\right] = i\hbar \frac{\partial \hat{f}}{\partial x_i} \ , \qquad [\hat{x}_i, \hat{g}(\vec{p})] = i\hbar \frac{\partial \hat{g}}{\partial p_i} \ .$$

Gli esercizi seguenti sono relativi a problemi unidimensionali
(funzioni d'onda dipendenti solo da x)

10. Esplicitare (cioè dire come operano sulla generica $\psi(x)$) gli operatori seguenti:

$$e^{i\varphi\hat{P}} \ , \qquad e^{a\frac{d}{dx}}$$

dove φ ed a sonno costanti numeriche e l' operatore $\hat{P}$ è l'operatore "parità" definito da: $\hat{P}\psi(x) = \psi(-x)$.

11. Se un pacchetto d'onde ha la forma

$$\psi(x) = C\, e^{\frac{i}{\hbar}p_0 x} f(x)$$

con $f(x)$ funzione reale, allora dimostrare che p_0 coincide con il valor medio di $\hat{p}$.

12. L'azione di un operatore lineare $\hat{A}$ su di una ψ si può mettere nella seguente forma (operatore integrale lineare):

$$\varphi(x) = \hat{A}\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} A(x, x')\psi(x')dx' \ .$$

$A(x, x')$ si chiama nucleo dell' operatore $\hat{A}$.

a) Dimostrare che se a_k e $u_k(x)$ sono gli autovalori e le autofunzioni di $\hat{A}$, si ha:

$$A(x, x') = \sum_k a_k u_k(x) u_k^*(x') \ .$$

b) Determinare i nuclei degli operatori seguenti:

$$x \ , \quad \hat{p} \ , \quad T_a \equiv e^{a\frac{d}{dx}} \ , \quad \hat{P} \ , \text{ dove } \ \hat{P}\psi(x) = \psi(-x) \ .$$

c) Se $\hat{C} = \hat{A}\hat{B}$, dimostrare che tra i nuclei corrispondenti vale la seguente equazione

$$C(x, x') = \int_{-\infty}^{\infty} A(x, x'')B(x'', x')\, dx'' \ .$$