Università degli Studi di Perugia - Corso di Laurea Triennale in Fisica

Corso di

MECCANICA QUANTISTICA

Problem Set 3

1. All'istante $t = 0$ la funzione d' onda di una particella libera in moto unidimensionale è data da

$$\psi(x, 0) = A\left(e^{ik_0x} - e^{-2ik_0x}\right) \ .$$

Si calcolino gli istanti t_n successivi per i quali risulti massima la probabilità di trovare la particella nell' origine.

2. Una particella di massa m, libera di muoversi lungo l'asse x, è descritta al tempo $t = 0$ dalla seguente funzione d'onda non normalizzata

$$\psi(x, 0) = 1 - 2\sin^2 kx \ .$$

a) Lo stato descritto dalla ψ data è o non è un autostato dell' energia? È o non è un autostato dell' impulso?

b) In caso affermativo, qual è il corrispondente autovalore?

c) In caso negativo quali sono i possibili autovalori e le rispettive probabilità?

d) Calcolare la corrente di probabilità.

e) Qual è lo stato all' istante generico $t > 0$.

3. Una particella di massa m è costretta nel segmento $-L/2 \leq x \leq L/2$ (buca infinita di potenziale). Il suo stato, all' istante $t = 0$, è descritto dalla funzione d' onda

$$\psi(x, 0) = \sqrt{\frac{1}{L}}\left[\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \sin\left(\frac{(n+1)\pi x}{L}\right)\right]$$

con n intero positivo dispari. Calcolare il periodo con cui oscilla nel tempo il valor medio di $\hat{x}$ e mostrare che per n grandi questo periodo coincide con quello classico.

4. Un pacchetto d' onda unidimensionale è descritto all' istante $t = 0$ dalla funzione d'onda

$$\psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{(\Delta x)_0\sqrt{2\pi}}}\exp\left[-\frac{x^2}{4(\Delta x)_0^2}\right] \ , \qquad (\Delta x)_0 = 10^{-9}\text{cm}$$

Qual è lo sparpagliamento dopo 1 s nei casi in cui:

a) si tratta di un pacchetto d'onde elettromagnetico che si propaga nel vuoto (costituito da sole onde progressive).

b) si tratta di un elettrone non soggetto a forze .

Perché il risultato è diverso nei due casi?

5. Un fucile nelle migliori condizioni di puntamento e mira spara ad intermittenza delle pallottole. Ogni pallottola, del peso di 28 g, impiega un tempo di 0.5 s a raggiungere il bersaglio, calcolare lo sparpagliamento minimo dei colpi sul bersaglio.

6. Una particella di massa m si muove soggetta al potenziale

$$V(x) = \begin{cases} 0\ , & x < -L\ ; \\ V_0\ , & -L < x < 0\ ; \\ \infty\ , & x > 0\ . \end{cases}$$

Calcolare le autofunzioni dell' energia nel caso $E > V_0$, il coefficiente di riflessione della doppia barriera di potenziale e la densità di corrente di probabilità nelle tre zone dell' asse x.

7. Una particella in una buca di potenziale infinita, è in uno stato descritto dalla funzione d' onda

$$\psi(x) = Ax(a-x)\ ,$$

dove a è la larghezza della buca e A è una costante. Trovare la distribuzione di probabilità per le differenti energie della particella e il valor medio e la dispersione dell' energia.

8. Calcolare la forza media esercitata dalla particella sulle pareti della buca infinita di potenziale.

9. Un oscillatore armonico unidimensionale di pulsazione ω è in uno stato di sovrapposizione dei due stati di energia più bassa. Il valore medio dell' energia è $\hbar\omega$.

a) È determinato il valor medio di $\hat{x}$ (variabile posizione) con questa informazione?

b) Come si può scrivere il valor medio di $\hat{x}$ in funzione del tempo?

10. Si consideri una particella soggetta al potenziale unidimensionale

$$V(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{1}{2}m\omega^2 x^2, & x \geq 0. \end{cases}$$

a) Determinare le autofunzioni dell' energia in termini di quelle dell' oscillatore armonico di massa m e pulsazione ω.

b) Si supponga che a $t = 0$ lo stato del sistema sia descritto da una generica combinazione lineare delle due autofunzioni di energia più bassa. Cosa si può dire di $\langle \hat{x} \rangle_t$?

c) Se in uno di tali stati $\langle \hat{x} \rangle_{t=0} = 0$, è definito il valor medio dell' energia per $t = 0$?