Università degli Studi di Perugia - Corso di Laurea Triennale in Fisica

Corso di

MECCANICA QUANTISTICA

Problem Set 4

1. Determinare la distribuzione di probabilità dell' impulso nello stato fondamentale dell' atomo idrogenoide.

2. Un atomo di idrogeno si trova nello stato di funzione d' onda

$$\psi(r) = N z^2 e^{-ar^2} \ , \qquad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \ , \qquad (a>0) \ .$$

Se una misura di energia fornisce il risultato E_3 ($n = 3$), lo stato dopo la misura è autostato di L_z? E di L^2?

3. Un atomo di idrogeno (si ignori lo spin) si trova in uno stato di funzione d'onda

$$\psi(r) = N \frac{xy}{r^2}\, e^{-ar^2} \ , \qquad (a>0) \ . \tag{1}$$

a) Mostrare che (1) è un autostato di L^2 con $\ell = 2$.

b) Quali sono i possibili risultati di una misura di L_x, L_y e L_z?

c) Se una misura dell' energia fornisce il risultato E_n (< 0) , qual è la funzione d' onda del sistema dopo la misura?

d) È possibile stabilire un limite inferiore non banale al valor medio dell' energia nello stato (1)? Se sì quale?

4. L' Hamiltoniana di un sistema quantistico, rotore rigido isotropo e carico in un campo magnetico uniforme parallelo a z, è della forma

$$H = \frac{\vec{L}^2}{2I} + \omega L_z \ ,$$

dove I ed ω sono costanti. Al tempo $t = 0$ il sistema è descritto dalla seguente funzione d' onda

$$\psi(\theta,\varphi,t=0) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\, \sin\theta\cos\varphi \ ,$$

a) Quali sono i possibili risultati di una misura di $\vec{L}^2$.

b) Quali sono i possibili risultati di una misura di energia e quali le rispettive probabilità.

c) Determinare la funzione d' onda all' istante t generico.

5. Una particella si trova in uno stato descritto dalla seguente funzione d' onda

$$\psi(x,y,z) = N\, z\, e^{-\alpha r} \ , \qquad (\alpha > 0) \ .$$

Ad un certo istante si misurano L^2 ed L_z.

a) Quali sono i risultati della misura.

b) Quale sarà la funzione d' onda immediatamente dopo le misure.

c) Sotto quali condizioni la risposta alla domanda b) è valida per qualunque istante successivo e non soltanto immediatamente dopo le misure?

d) Calcolare il valor medio di L_x e L_y.

6. Scrivere le componenti del vettore $\vec{r}$ come combinazioni lineari di armoniche sferiche.

7. Uno stato è descritto dalla funzione d' onda

$$\psi(\vec{r}) = xyf(r) \ ,$$

calcolare il valor medio di L_z.

8. Autovalori e autovettori di $\sigma_n = \vec{\sigma} \cdot \hat{n}$.

9. Se lo stato in cui si trova una particella è

$$\chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \quad \text{oppure} \quad \chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \tag{2}$$

trovare la probabilità di avere $\sigma_n = 1$ o $\sigma_n = -1$. Calcolare il valor medio di σ_n sugli stati (2).

10. Calcolare gli autovalori di

$$\hat{A} = a + \vec{b} \cdot \vec{\sigma}. \tag{3}$$

11. Fornire l' espressione esplicita di

$$F(\hat{A}) \ .$$

dove $F(x)$ è una generica funzione e $\hat{A}$ è l'operatore in (3).
In particolare fornire l' espressione esplicita dell' operatore unitario

$$U = \exp\left[i\frac{\alpha}{2}\hat{n} \cdot \vec{\sigma}\right] \ . \tag{4}$$

12. Mostrare che il prodotto scalare

$$\vec{V} = (\varphi, \vec{\sigma}\psi)$$

dove φ e ψ sono spinori, trasforma come un vettore per rotazioni generate dall'operatore U definito in (4), sotto la cui azione uno spinore trasforma come

$$\psi' = U\psi \ .$$

13. Cercare gli autovalori e le autovettori dell'operatore

$$V = a_1\sigma_{1z} + a_2\sigma_{2z} + b\vec{\sigma_1} \cdot \vec{\sigma_2} \ ,$$

con a_1, a_2 e b reali. Studiare il caso particolare in cui $a_1 = a_2 = a$.