Università degli Studi di Perugia - Corso di Laurea Triennale in Fisica

Corso di

MECCANICA QUANTISTICA

Problem Set 5

1. Data la funzione d'onda

$$u(\theta, \phi) = Y_1^0(\theta, \phi)\chi_+ ,$$

determinare la probabilità di trovare per J^2 il valore $\frac{15}{4}\hbar^2$.

2. Due particelle identiche di spin 1/2, non interagenti fra loro, sono vincolate a muoversi su una superficie sferica di raggio costante in modo che i soli gradi di libertà possibili siano quelli di momento angolare e di spin.

a) Tra tutti gli stati accessibili al sistema delle due particelle, determinare quanti sono gli stati che soddisfano le seguenti proprietà:

i) sono autostati di L_z e S_z ($\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$, $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$);

ii) i numeri quantici ℓ_1 e ℓ_2 delle due particelle valgono 0 oppure 1:

iii) la configurazione di spin totale è in uno stato di tripletto (cioè gli stati sono anche autostati di S^2 con $s = 1$).

b) Scrivere le autofunzioni di tali stati e discutere quali sono gli autovalori di L_z che possono essere ottenuti.

c) Scrivere le autofunzioni degli stati che soddisfano alle proprietà i) - iii) e che corrispondono all'autovalore $2\hbar$ di J_z ($\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$).

3. Due particelle 1 e 2 di spin 1/2 si trovano in uno stato di singoletto $s = 0$. Si effettuano sul sistema misure di spin.

a) Determinare la probabilità $P(s_{1z} = 1/2)$ di ottenere $s_{1z} = 1/2$.

b) Determinare la probabilità $P(s_{1x} = 1/2)$ di ottenere $s_{1x} = 1/2$.

c) Determinare la probabilità $P(s_{1x} = 1/2, s_{2x} = 1/2)$ di ottenere simultaneamente $s_{1x} = 1/2$ e $s_{2x} = 1/2$.

d) Determinare la probabilità $P(s_{1z} = 1/2, s_{2x} = 1/2)$ di ottenere simultaneamente $s_{1z} = 1/2$ e $s_{2x} = 1/2$.

4. Un sistema di due particelle si trova in uno stato di funzione d'onda

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 \, \phi(r_1, r_2) .$$

Quali sono i possibili risultati di una misura di L^2, L_1^2 e L_{1z}.

5. Due bosoni identici di spin $s = 0$ liberi sono nei due stati $\psi_1(\vec{r}_1)$ e $\psi_2(\vec{r}_2)$ normalizzati e di parità opposta.

a) Cercare la densità di presenza P di una particella senza osservare l'altra.

b) Qual è la probabilità P_1 che una particella si trovi nel semispazio $z \geq 0$?

c) Qual è la probabilità P_2 che entrambe si trovino in $z \geq 0$?

d) Stesso problema per particelle di spin 1/2 nello stato di spin α.

Mostrare la differenza con il caso di particelle non identiche.

6. Si trovi la prima correzione perturbativa per i livelli energetici di una buca infinita di potenziale di larghezza L e centrata in $x = 0$, soggetta al potenziale di perturbazione

$$H_p = V_0 \left(1 - \frac{2|x|}{L}\right), \qquad V_0 > 0\,.$$

7. Si trovi la correzione fino al secondo ordine della teoria perturbativa per i livelli energetici di una buca infinita di potenziale di larghezza L e centrata in $x = L/2$, soggetta al potenziale di perturbazione

$$H_p = V_0 \cos^2 \frac{\pi x}{L}, \qquad V_0 > 0\,.$$

8. Si cerchi un limite superiore per il più basso livello energetico di un sistema unidimensionale la cui energia potenziale è

$$V(x) = \begin{cases} +\infty & x \le a \\ -V_0 & a < x \le b \\ 0 & x > b\,. \end{cases}$$

9. Calcolare il potenziale efficace medio $\phi(r)$ agente su una carica puntiforme a distanza r dal nucleo di un atomo idrogenoide non eccitato (si trascuri la polarizzazione di quest'ultimo). Dare le espressioni limite di $\phi(r)$ per grandi e piccole distanze dall'atomo.

10. Calcolare il valor medio di r^{-2} nello stato $(n\,m\,l)$ dell'atomo di idrogeno.

11. Usando l'equazione radiale dell'atomo di idrogeno si derivi la relazione di Kramers

$$\frac{s+1}{n^2}\langle r^s\rangle - (2s+1)a\langle r^{s-1}\rangle + \frac{s}{4}\left[(2l+1)^2 - s^2\right] a^2 \langle r^{s-2}\rangle = 0\,,$$

dove $\langle r^s\rangle$ è il valor medio di r^s nello stato $(n\,m\,l)$ e $s > -2l - 3$. Come applicazione si calcolino i valori medi $\langle r^{-1}\rangle$, $\langle r\rangle$, $\langle r^2\rangle$, $\langle r^{-3}\rangle$ e $\langle r^{-4}\rangle$.

12. Si calcoli la prima correzione correzione perturbativa per i due livelli energetici più bassi di un atomo di idrogeno immerso in un campo elettrico (Effetto Stark).

13. Si calcoli il livello fondamentale dell'atomo di elio trattando l'interazione coulombiana tra i due elettroni come una perturbazione (si ignorino lo spin degli elettroni e la simmetria o l'antisimmetria della parte spaziale della funzione d'onda). Si ripeta il calcolo usando il metodo variazionale.