Università degli Studi di Perugia - Corso di Laurea Triennale in Fisica

Corso di

MECCANICA QUANTISTICA

Problem Set 6

Problema 1

Si consideri un **oscillatore armonico isotropo bidimensionale** con Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_1^2 + m^2\omega^2 x_1^2\right) + \frac{1}{2m}\left(p_2^2 + m^2\omega^2 x_2^2\right)$$

e momento angolare

$$L = x_1 p_2 - x_2 p_1 \ .$$

Si introducano gli operatori

$$A_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1 \mp i a_2) \ , \qquad A_\pm^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1 \pm i a_2) \tag{1}$$

dove gli opertori di distruzione e creazione sono definiti da

$$a_i = \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\left(i p_i + m\omega x_i\right) \ , \qquad a_i^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\left(-i p_i + m\omega x_i\right) \ .$$

Si mostri che gli operatori (1) soddisfano all' algebra

$$[A_r, A_s] = [A_r^\dagger, A_s^\dagger] = 0 \ , \qquad [A_r, A_s^\dagger] = \delta_{rs} \quad (r = + \text{ o } -, s = + \text{ o } -) \ .$$

- Determinare un insieme completo di autovettori comuni di $N_+ \equiv A_+^\dagger A_+$ ed $N_- \equiv A_-^\dagger A_-$.
- Si esprimano H ed L in termini degli operatori $N_\pm$, si mostri che H ed L formano un insieme completo di osservabili mutuamente commutanti e se ne calcoli lo spettro.
- Si determini la degenerazione dei livelli energetici.

Problema 2

Determinare l' evoluzione temporale della funzione d' onda $\psi_{\ell=1,m=0}(t=0)$ secondo l'hamiltoniana $H = \omega L_x$. Se una misura di energia dà come risultato $-\hbar\omega$ esprimere il corrispondente stato come combinazione delle funzioni d'onda con $\psi_{\ell=1,m}$.

Problema 3

Si consideri un sistema la cui Hamiltoniana è $H = \frac{g}{4}(L_+ L_-)^2$. Al tempo $t = 0$ lo stato del sistema è descritto dalla funzione d' onda $\psi(0) = A \sin\theta \sin\varphi$;

1) determinare la costante di normalizzazione A;

2) determinare l' evoluzione temporale della funzione d' onda;

3) a quale tempo successivo essa diviene $\psi(t) = A \sin\theta \cos\varphi$ a meno di una fase.

Problema 4

Un elettrone sia nello stato fondamentale di un atomo idrogenoide

1) si calcolino i valori di aspettazione dell' energia cinetica e potenziale e si determini l'energia di legame;

2) si mostri che vale il teorema del viriale della meccanica quantistica;

2) si calcoli, usando la teoria delle perturbazioni al primo ordine, la variazione in energia se la carica del nucleo varia da Z a $Z+1$ e si confronti il risultato con quello esatto.

Problema 5

Scrivere la funzione d'onda per il livello fondamentale dell' atomo di elio, calcolare il valore dello spin totale e dire qual è la sua degenerazione nell' approssimazione in cui l' interazione tra i due elettroni sia trascurabile. Studiare inoltre le medesime grandezza fisiche per il primo livello eccitato. Fornire poi un argomento qualitativo per i valori dell' energia del primo livello eccitato quando si consideri l'interazione tra i due elettroni. Per rispondere a quest' ultima domanda si usino le funzioni d'onda dei primi due livelli atomici:

$$\phi_{1s} = \sqrt{\frac{Z^3}{\pi a_0^3}}\, e^{-\frac{Zr}{a_0}} \;, \qquad \phi_{2s} = \sqrt{\frac{Z^3}{32\pi a_0^3}} \left(2 - \frac{Zr}{a_0}\right) e^{-\frac{Zr}{2a_0}} \;.$$

Problema 6

Misure dell' Hamiltoniana $H_0 = \omega S_x$ per una particella di spin 1/2 danno con certezza il valore dell' energia $\hbar\omega/2$. Determinare le correzioni al primo ordine e al secondo ordine per l'energia fornite da una perturbazione $H_p = \frac{\epsilon\omega}{\hbar} S_+ S_-$. Confrontare il risultato ottenuto con il risultato esatto.

Problema 7

Un atomo di idrogeno è posto in un campo elettrico omogeneo dato da:

$$\vec{E}(t) = \frac{B}{\pi e a_0} \frac{\tau}{t^2 + \tau^2} \hat{n}$$

dove B e τ sono delle costanti con le dimensioni di $\hbar$ e tempo rispettivamente, e è la carica dell' elettrone ed $\hat{n}$ è il versore di una direzione generica. Se al tempo $t = -\infty$ l'atomo è nel suo stato fondamentale, calcolare la probabilità che esso sia nello stato $2p$ a $t = \infty$.