Teoria Quantistica dei Campi

Problem Set 2

Esercizio 1: il campo di gauge in notazione tensoriale

Il gruppo $SU(N)$ è formato da matrici $N \times N$ unitarie, $U^\dagger U = UU^\dagger = 1$.
Per trasformazioni infinitesime possiamo scrivere

$$U_{jk} = \delta_{jk} + i\epsilon_{jk}$$

dove ϵ è hermitiana:

$$\epsilon_{jk} = \epsilon^*_{kj}.$$

È più conveniente usare indici alti e bassi:

$$\epsilon_{jk} \equiv \epsilon_j{}^k$$

in modo che la coniugazione complessa scambia tra loro indici alti e bassi:

$$\epsilon_j{}^k = \left(\epsilon^j{}_k\right)^*$$

La condizione di hermiticità si scrive quindi così:

$$\epsilon_j{}^k = \epsilon^k{}_j.$$

Ciò siginifica che l'ordine degli indici alti e bassi contiene informazioni non banali.
Il vettore N-dimensionale ϕ_i ed il suo complesso coniugato ϕ^i seguono questa legge di trasformazione infinitesima,

$$\phi_i \to \phi_i + i\epsilon_i{}^l\phi_l \qquad \phi^i \to \phi^i - i\epsilon^i{}_k\phi^k,$$

dove

$$\epsilon_i{}^k = \left(\epsilon^i{}_k\right)^* \qquad \phi^i = (\phi_i)^*.$$

Per campi nella rappresentazione aggiunta $\phi_i{}^j$ abbiamo

$$\phi_i{}^j \to \phi_i{}^j + i\epsilon_i{}^l\phi_l{}^j - i\epsilon^j{}_k\phi_i{}^k.$$

a) Costruire la derivata covariante per ϕ_i e ϕ^i. Mostrare che la legge di trasformazione infinitesima per i bosoni di gauge è

$$W_{\mu i}{}^j \to W'_{\mu i}{}^j = W_{\mu i}{}^j + i\epsilon_i{}^l W_{\mu l}{}^j - i\epsilon^j{}_k W_{\mu i}{}^k - \frac{1}{g}\partial_\mu\epsilon_i{}^j$$

b) Costruire il tensore di field strength ${F_{\mu\nu j}}^i$ per i campi di gauge ${W_{\mu i}}^j$.

c) Costruire la derivata covariante per scalari nella rappresentazione aggiunta.

Esercizio 2: teoria di gauge $O(N)$

Si considerino due set di campi scalari, $\vec{\phi}_1$ e $\vec{\phi}_2$, che trasformino nella rappresentazione vettoriale del gruppo $O(N)$.

a) Mostrare che sotto trasformazioni infinitesime del gruppo $O(N)$ si ha

$$(\phi_\alpha)_i \to (\phi_\alpha)_i + \epsilon_{ij}\,(\phi_\alpha)_j \qquad \alpha = 1, 2,$$

dove $\epsilon_{ij} = -\epsilon_{ji}$ sono i parametri che descrivono la trasformazione infinitesima.

b) Costruire la derivata covariante per $\vec{\phi}_1$.

Esercizio 3: Generatori rotti e bosoni di Goldstone

Siano ϕ_i campi scalari nella rappresentazione vettoriale del gruppo $SU(N)$.

a) Scrivere il potenziale scalare per ϕ_i invariante sotto $SU(N)$.

b) Determinare il possibile meccanismo per la rottura spontanea di simmetria per ϕ_i. Quanti bosoni di Goldstone ci sono?

c) Discutere il possibile meccanismo di rottura spontanea di simmetria quando ci sono due campi scalari ϕ_{1i} e ϕ_{2j}.

Esercizio 4 : Rottura di simmetria e campi scalari nell'aggiunta.

Siano ${\phi_i}^j$ campi scalari nella rappresentazione aggiunta del gruppo $SU(N)$.

a) Scrivere il potenziale scalare per ${\phi_i}^j$.

b) Determinare il possibile meccanismo di rottura spontanea di simmetria per ${\phi_i}^j$.

Esercizio 5 : Potenziale scalare e transizione di fase del primo ordine

Si consideri un campo scalare hermitiano ϕ con potenziale

$$V_0(\phi) = -\frac{\mu^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4}\phi^4 \ .$$

$V_0(\phi)$ ha un minimo degenere per $\phi = \pm v$, con $v = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}$.
Si supponga di aggiungere un termine cubico al potenziale:

$$V_0'(\phi) = -\frac{\mu^2}{2}\phi^2 + \frac{2\xi}{3}\phi^3 + \frac{\lambda}{4}\phi^4 \ .$$

Mostrare che la degenerazione nel minimo del potenziale è adesso rimossa e determinare il vero minimo. Si mostri inoltre che il vacuum expectation value $\langle\phi\rangle_0$ come funzione del parametro ξ cambia in maniera discontinua dal valore $\langle\phi\rangle_0 = -v$ al valore $\langle\phi\rangle_0 = v$ quando ξ passa da valori positivi a valori negativi attraversando lo 0.

Esercizio 6 : Superconduttività come fenomeno di Higgs

Si consideri la QED con campo di Higgs, con Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \left(D_\mu\phi^\dagger\right)(D^\mu\phi) + \frac{\mu^2}{2}\phi^\dagger\phi - \frac{\lambda}{4}\left(\phi^\dagger\phi\right)^2 - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

con

$$D_\mu\phi = (\partial_\mu - ieA_\mu)\phi, \qquad F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \ .$$

Si consideri il caso statico in cui $\partial^0\phi = \partial^0\mathbf{A} = 0$ e $A_0 = 0$.

a) Mostrare che l'equazione del moto per $\mathbf{A}$ è

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J},$$

dove

$$\mathbf{J} = ie\left[\phi^\dagger(\nabla - ie\mathbf{A})\phi - (\nabla + ie\mathbf{A})\phi^\dagger\phi\right].$$

b) Mostrare che con rottura spontanea di simmetria, nell'approssimazione classica $\phi = v = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}$, la corrente $\mathbf{J}$ ha la forma (equazione di London)

$$\mathbf{J} = e^2v^2\mathbf{A},$$

da cui segue (effetto Meissner)

$$\nabla^2\mathbf{B} = e^2v^2\mathbf{B}$$

c) La resistività ρ del sistema è definita come

$$\mathbf{E} = \rho\mathbf{J}.$$

Mostrare che nel caso di rottura spontanea di simmetria si ha $\rho = 0$, e quindi superconduttività.