Teoria Quantistica dei Campi

Problem Set 4

Esercizio 1

Si consideri un campo scalare complesso φ, con $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1$, dove

$$\mathcal{L}_0 = -\partial^\mu \varphi^\dagger \partial_\mu \varphi - m^2 \varphi^\dagger \varphi$$

$$\mathcal{L}_1 = -\frac{1}{4} Z_\lambda \lambda \left(\varphi^\dagger \varphi\right)^2 + \mathcal{L}_{ct}$$

$$\mathcal{L}_{ct} = -\left(Z_\varphi - 1\right) \partial^\mu \varphi^\dagger \partial_\mu \varphi - \left(Z_m - 1\right) m^2 \varphi^\dagger \varphi$$

Questa teoria ha due sorgenti, J e $J^\dagger$, quindi è necessario distinguerle quando si disegnano i diagrammi: si adotti la convenzione per cui si attacca una freccia al propagatore, che punta verso la sorgente se si tratta di $J^\dagger$ e fuori dalla sorgente se si tratta di J.

a) Quali vertici ci sono nei diagrammi di questa teoria? Quali sono i fattori di simmetria associati?

b) Ignorando i controtermini, si disegnino tutti i diagrammi connessi con $1 \leq E \leq 4$ e $0 \leq V \leq 2$ e si determinino i loro fattori di simmetria.

Esercizio 2

Per qualsiasi dimensionalità d dello spazio-tempo, un campo di Dirac $\Psi_\alpha(x)$ porta un indice di spin α ed ha un termine cinetico della forma $i\bar{\Psi}\gamma^\mu \partial_\mu \Psi$. Le matrici γ^μ sono adimensionate e $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0$.

a) Quale è la dimensione in unità di massa, $[\Psi]$, del campo Ψ?

b) Si considerino interazioni del tipo $g_n \left(\bar{\Psi}\Psi\right)^n$, dove $n > 2$ è un intero. Quale è la dimensione in unità di massa, $[g_n]$, di g_n?

c) Si considerino interazioni del tipo $g_{m,n} \varphi^m \left(\bar{\Psi}\Psi\right)^n$, dove φ è un campo scalare e $m \geq 1$, $n \geq 1$ sono interi. Quale è la dimensione in unità di massa, $[g_{m,n}]$, di $g_{m,n}$?

d) In $d = 4$ dimensioni, quali di queste interazioni sono ammesse in una teoria rinormalizzabile?

Esercizio 3

a) Si usi il power counting per costruire controtermini e disegnare tutti i grafici 1PI divergenti ad un loop per un campo scalare reale che abbia la seguente Lagrangiana di interazione:

$$\mathcal{L}_{int} = -\frac{\lambda_1}{3!}\phi^3 - \frac{\lambda_2}{4!}\phi^4$$

b) Si usi il power counting per costruire controtermini per la Lagrangiana della QED:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\psi - e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu},$$

con $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

Esercizio 4

Esercizio (4.2) da Peskin - Schroeder, "An introduction to quantum field theory".

Esercizio 5

Esercizio (4.3) da Peskin - Schroeder, "An introduction to quantum field theory".

Esercizio 6

Esercizio (4.4) da Peskin - Schroeder, "An introduction to quantum field theory".