Teoria Quantistica dei Campi

Problem Set 5

Esercizio 1

Il funzionale generatore per la QED nella gauge covariante ha la seguente forma:

$$Z\left(J,\eta,\bar{\eta}\right)=N\int\left[dA_\mu\right]\left[d\psi\right]\left[d\bar{\psi}\right]e^{i\int\mathcal{L}_{\mathrm{eff}}d^4x}$$

dove

$$\mathcal{L}_{\mathrm{eff}}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+i\bar{\psi}\gamma^\mu\left(\partial_\mu-ieA_\mu\right)\psi-m\bar{\psi}\psi-\frac{1}{2\alpha}\left(\partial^\mu A_\mu\right)^2+J^\mu A_\mu+\bar{\psi}\eta+\bar{\eta}\psi$$

a) Si dimostri che, se si richiede che il funzionale generatore $Z\left(J,\eta,\bar{\eta}\right)$ sia invariante sotto la trasformazione di gauge infinitesima

$$A\mu\to A_\mu+\partial_\mu\Lambda\ ,\quad \psi\to\psi-ie\Lambda\psi,$$

si ottiene l'identità di Ward-Takahashi

$$\left[\frac{i}{\alpha}\Box\partial^\mu\frac{\delta}{\delta J_\mu}-\partial^\mu J_\mu-e\left(\bar{\eta}\frac{\delta}{\delta\eta}-\eta\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}}\right)\right]Z\left(J,\eta,\bar{\eta}\right)=0$$

b) Si traduca l'identità di Ward-Takahashi in una equazione per il funzionale generatore delle funzioni di Green connesse W, tramite $Z=e^{iW}$. Inoltre si scriva l'equazione per la trasformata di Legendre di $W\left[\eta,\bar{\eta},J_\mu\right]$:

$$\Gamma\left[\psi,\bar{\psi},A_\mu\right]=W\left[\eta,\bar{\eta},J_\mu\right]-\int d^4x\left(J^\mu A_\mu+\bar{\psi}\eta+\bar{\eta}\psi\right),$$

dove

$$\psi=\frac{\delta W}{\delta\bar{\eta}}\ ,\quad \bar{\psi}=\frac{\delta W}{\delta\eta}\ ,\quad A_\mu=\frac{\delta W}{\delta J_\mu}$$

sono usualmente denominati campi classici.

c) Differenziando il risultato del punto precedente rispetto a $\bar{\psi}(x_1)$ e $\psi(y_1)$ e ponendo $\psi=\bar{\psi}=A_\mu=0$ si può derivare la forma usuale dell'identità di Ward-Takahashi:

$$q^\mu\Gamma_\mu\left(p,q,p+q\right)=S_F^{-1}(p+q)-S_F^{-1}(p),$$

dove la vertex function Γ_μ ed il propagatore S_F^{-1} nello spazio dei momenti sono collegati alla Γ del punto precedente dalle seguenti equazioni:

$$\int d^4x d^4x_1 d^4y_1 e^{i(p'x_1 - py_1 - qx)} \frac{\delta^3\Gamma}{\delta\bar{\psi}(x_1)\delta\psi(y_1)\delta A_\mu} = ie\,(2\pi)^4\,\delta^4\left(p' - p - q\right)\Gamma_\mu\left(p, q, p'\right)$$

$$\int d^4x_1 d^4y_1 e^{i(p'x_1 - py_1)} \frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar{\psi}(x_1)\delta\psi(y_1)} = ie\,(2\pi)^4\,\delta^4\left(p' - p\right) iS_F^{-1}(p)$$

d) Dal risultato al punto b) si dimostri che

$$-\frac{1}{\alpha}\Box_x \partial_x^\mu \frac{\delta^2 W}{\delta J_\mu \delta J_\nu} = \partial_x^\mu g_{\mu\nu}\delta^4\left(x - y\right),$$

che nello spazio dei momenti si riscrive nella forma

$$\frac{i}{\alpha}k^2 k^\mu \tilde{G}_{\mu\nu}(k) = k_\nu,$$

con

$$-\frac{\delta^2 W}{\delta J_\mu(x)\delta J_\nu(y)} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)}\tilde{G}_{\mu\nu}(k)$$

Esercizio 2

Esercizio (6.1) da Peskin - Schroeder, “An introduction to quantum field theory”.

Esercizio 3

Esercizio (6.3) da Peskin - Schroeder, “An introduction to quantum field theory”.

Esercizio 4

Esercizio (7.3) da Peskin - Schroeder, “An introduction to quantum field theory”.