Università degli Studi di Perugia - Corso di Laurea Triennale in Fisica

Corso di

MECCANICA QUANTISTICA

Regole di selezione

1 Scalare

$$[S, L_i] = 0 \ ,$$

e, in particolare,

$$[S, L_+] = 0 \ .$$

Prendendo l'elemento per la transizione $\ell, m-1 \longrightarrow \ell, m$ di questa uguaglianza, risulta $(S)_{\ell m, \ell m}$ indipendente da m.

2 Vettore

$$[\hat{n} \cdot \hat{L}, \hat{\vec{V}}] = i\hbar\hat{\vec{V}} \times \hat{n} \ , \qquad (\hat{n} \text{ versore generico}) \ ,$$

che implica

$$[L_x, V_y] = i\hbar V_z \ , \qquad \text{e cicliche.}$$

1 Regole per ℓ

$$\begin{aligned}
[L^2, V_x] &= 2i\hbar(V_y L_z - L_y V_z) = 2i\hbar(L_z V_y - L_y V_z + i\hbar V_x) \ , \\
[L^2, V_y] &= 2i\hbar(V_z L_x - L_z V_x) \ , \\
[L^2, V_z] &= 2i\hbar(L_y V_x - V_y L_x) \ .
\end{aligned}$$

Da:

$$[L^2, [L^2, V_x]] = 2\hbar^2(V_x L^2 + L^2 V_x) - 4\hbar^2 L_x(\vec{L} \cdot \vec{V}) \ ,$$

prendendo l'elemento per la transizione $\ell' \longrightarrow \ell$ (con $\ell \neq \ell'$),

$$\begin{aligned}
&\hbar^4 \left[\ell^2(\ell+1)^2 - 2\ell\ell'(\ell+1)(\ell'+1) + \ell'^2(\ell'+1)^2 - 2\ell'(\ell'+1) - 2\ell(\ell+1)\right](V_x)_{\ell\ell'} \\
&= \hbar^4(\ell+\ell'+2)(\ell+\ell')(\ell-\ell'+1)(\ell-\ell'-1)(V_x)_{\ell\ell'} = 0 \ ,
\end{aligned}$$

per cui $(V_x)_{\ell\ell'} = 0$ salvo che $\ell' = \ell \pm 1$. Includendo il caso $\ell = \ell'$ (che era stato escluso in partenza) si ha

$$\Delta\ell = 0, \ \pm 1 \ .$$

Tenendo conto anche della parità si ha $\Delta\ell = \pm 1$ per vettori polari e $\Delta\ell = 0$ per vettori assiali. Inoltre la transizione $\ell = 0 \longrightarrow \ell = 0$ è proibita (si verifica, ad esempio, prendendo questo elemento di transizione ai due membri dell' uguaglianza $[L_y, V_z] = i\hbar V_x$).

2 Regole per m

$$[L_z,\ V_\pm] = \pm\hbar V_\pm \ , \qquad (V_\pm = V_x \pm iV_y) \ .$$

Prendendo l'elemento di transizione $m' \longrightarrow m$ si ha:

$$(V_+)_{m,m'} = 0 \ , \quad \text{salvo che} \ \ m' = m - 1 \ ,$$
$$(V_-)_{m,m'} = 0 \ , \quad \text{salvo che} \ \ m' = m + 1 \ ,$$

quindi

$$(V_x)_{m,m'} = (V_y)_{m,m'} = 0 \ , \quad \text{salvo che} \ \ m' = m \pm 1 \ .$$

Infine dal commutatore: $[L_z, V_z] = 0$, prendendo l'elemento di transizione $m' \longrightarrow m$ segue

$$(V_z)_{mm'} = 0 \ , \quad \text{salvo che} \ \ m' = m \ .$$

Riassumendo, le regole di selezione per m sono:

$$\Delta m = 0, \pm 1 \ .$$