Università degli Studi di Perugia - Corso di Laurea Triennale in Fisica

Corso di

MECCANICA QUANTISTICA

Relazioni di indeterminazione

1 Una disuguaglianza matematica

Si considerino due osservabili A e B e i loro operatori Hermitiani associati $\hat{A}$ e $\hat{B}$ che supponiamo non commutino

$$\left[\hat{A},\hat{B}\right] = i\hat{C} \ , \qquad \text{con} \ \ \hat{C} \neq 0 \ . \tag{1}$$

Con questa scrittura, cioè introducendo la i nel membro di destra della (1), l'operatore $\hat{C}$ è Hermitiano e il suo valor medio, di conseguenza, reale.

Gli *scarti quadratici medi* o *deviazioni standard* per $\hat{A}$ e $\hat{B}$ in un dato stato $\psi \in L^2$, (ΔA) e (ΔB), sono dati dalla radice quadrata positiva delle *varianze*

$$(\Delta A)^2 = \left\langle \left(\hat{A} - \langle\hat{A}\rangle\right)^2 \right\rangle = \left\langle \hat{A}^2 - 2\langle\hat{A}\rangle\hat{A} + \langle\hat{A}\rangle^2 \right\rangle = \langle\hat{A}^2\rangle - \langle\hat{A}\rangle^2 \ , \qquad (\Delta A) = \sqrt{(\Delta A)^2} \ ,$$
$$(\Delta B)^2 = \langle\hat{B}^2\rangle - \langle\hat{B}\rangle^2 \ , \qquad (\Delta B) = \sqrt{(\Delta B)^2} \ . \tag{2}$$

Teorema: vale la relazione di indeterminazione

$$(\Delta A)\,(\Delta B) \geq \frac{|\langle\hat{C}\rangle|}{2} \ , \tag{3}$$

che dà il "principio" di indeterminazione di Heisenberg per qualsiasi coppia di operatori non commutanti.

2 Dimostrazione di (3)

Introduciamo gli operatori "scarto" di $\hat{A}$ e $\hat{B}$

$$\hat{\Delta}_A \equiv \hat{A} - \langle\hat{A}\rangle \ , \qquad \hat{\Delta}_B \equiv \hat{B} - \langle\hat{B}\rangle \ .$$

Sono Hermitiani, per $\hat{A}$ e $\hat{B}$ Hermitiani, e si ha

$$\left[\hat{\Delta}_A, \hat{\Delta}_B\right] = i\hat{C} \ ,$$

Inoltre, dalle (2)

$$\left(\psi, \hat{\Delta}_A^2\psi\right) = (\Delta A)^2 \ , \qquad \left(\psi, \hat{\Delta}_B^2\psi\right) = (\Delta B)^2 \ .$$

Introducendo l' operatore $\hat{F}$ definito in termini dell'anticommutatore tra gli operatori scarto $\hat{\Delta}_A$ e $\hat{\Delta}_B$ attraverso la

$$\hat{F} \equiv \frac{1}{2}\left\{\hat{\Delta}_A, \hat{\Delta}_B\right\} = \frac{1}{2}\left(\hat{\Delta}_A\hat{\Delta}_B + \hat{\Delta}_B\hat{\Delta}_A\right) \ ,$$

si ha

$$\hat{\Delta}_A\hat{\Delta}_B = \frac{1}{2}\left\{\hat{\Delta}_A, \hat{\Delta}_B\right\} + \frac{1}{2}\left[\hat{\Delta}_A, \hat{\Delta}_B\right] = \hat{F} + \frac{i}{2}\hat{C} \ .$$

Calcoliamo

$$(\Delta A)^2 (\Delta B)^2 = \left(\psi, \hat{\Delta}_A^2 \psi\right) \left(\psi, \hat{\Delta}_B^2 \psi\right) = \left(\hat{\Delta}_A \psi, \hat{\Delta}_A \psi\right) \left(\hat{\Delta}_B \psi, \hat{\Delta}_B \psi\right) ,$$

nell'ultima uguaglianza si è usata la Hermitianità degli operatori scarto. Grazie alla disuguaglianza di Schwarz si può poi procedere come segue

$$\begin{aligned}\left(\hat{\Delta}_A \psi, \hat{\Delta}_A \psi\right) \left(\hat{\Delta}_B \psi, \hat{\Delta}_B \psi\right) &\geq \left|\left(\hat{\Delta}_A \psi, \hat{\Delta}_B \psi\right)\right|^2 = \left|\left(\psi, \hat{\Delta}_A \hat{\Delta}_B \psi\right)\right|^2 = \left|\left(\psi, \left\{\hat{F} + \frac{i}{2}\hat{C}\right\} \psi\right)\right|^2 \\ &= \left|\langle \hat{F} \rangle + \frac{i}{2}\langle \hat{C} \rangle\right|^2 = \langle \hat{F} \rangle^2 + \frac{1}{4}\langle \hat{C} \rangle^2 \geq \frac{1}{4}\langle \hat{C} \rangle^2 . \end{aligned} \tag{4}$$

Quindi

$$(\Delta A) (\Delta B) \geq \frac{|\langle \hat{C} \rangle|}{2} ,$$

cioè la (3).

3 Stati di minima indeterminazione

Il segno uguale in (3) vale se ψ è uno "stato di minima indeterminazione" per cui devono essere soddisfatte le equazioni

$$\hat{\Delta}_B \psi = \kappa \hat{\Delta}_A \psi , \tag{5}$$

$$\langle \hat{F} \rangle = 0 , \tag{6}$$

dove κ è una costante da determinare. Dalla (6) e usando la (5) si ha

$$0 = \langle \hat{F} \rangle = \left(\psi, \left\{\hat{\Delta}_A \hat{\Delta}_B - \frac{i}{2}\hat{C}\right\} \psi\right) = \left(\psi, \left\{\kappa \hat{\Delta}_A^2 - \frac{i}{2}\hat{C}\right\} \psi\right) = \kappa (\Delta A)^2 - \frac{i}{2}\langle \hat{C} \rangle ,$$

da cui

$$\kappa = \frac{i\langle \hat{C} \rangle}{2 (\Delta A)^2} .$$

Quindi gli stati di minima indeterminazione sono le soluzioni della seguente equazione

$$\left[\frac{i\langle \hat{C} \rangle}{2 (\Delta A)^2} \left(\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle\right) - \left(\hat{B} - \langle \hat{B} \rangle\right)\right] \psi = 0 . \tag{7}$$

Dato che

$$\langle \hat{F} \rangle = \left\langle \frac{1}{2} \left(\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}\right) \right\rangle - \langle \hat{A} \rangle \langle \hat{B} \rangle ,$$

quando $\langle \hat{F} \rangle = 0$ significa che le misure di A e di B sono statisticamente non correlate.

Nel caso in cui $\hat{A} = \hat{x}$, $\hat{B} = \hat{p}$, sappiamo che $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ e quindi segue che

$$(\Delta x)(\Delta p) \geq \frac{\hbar}{2} .$$

L' indeterminazione è minima quando

$$(\Delta x)(\Delta p) = \frac{\hbar}{2}$$

ed è soddisfatta l' equazione

$$\left[\frac{\hbar}{2\,(\Delta x)^2}\,(\hat{x}-\langle\hat{x}\rangle)+i\,(\hat{p}-\langle\hat{p}\rangle)\right]\psi(x)=0\ .$$

Questa è un'equazione differenziale del primo ordine, infatti, sostituendo ad $\hat{x}$ e $\hat{p}$ i relativi operatori, si ha

$$\left[\frac{\hbar}{2\,(\Delta x)^2}\,(\hat{x}-\langle\hat{x}\rangle)+\hbar\frac{\partial}{\partial x}-i\langle\hat{p}\rangle\right]\psi(x)=0\ . \tag{8}$$

La soluzione della (8) è

$$\psi(x)=Ne^{\frac{i}{\hbar}\langle p\rangle x}\,e^{-\frac{(x-\langle x\rangle)^2}{4(\Delta x)^2}}\ ,$$

dove N è la costante di integrazione che può essere fissata normalizzando ad 1 la funzione d'onda $\psi(x)$. Si ottiene

$$\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{\Delta x\sqrt{2\pi}}}e^{\frac{i}{\hbar}\langle p\rangle x}\,e^{-\frac{(x-\langle x\rangle)^2}{4(\Delta x)^2}}\ .$$

Questa funzione rappresenta un pacchetto d'onda di forma Gaussiana centrato in $x=\langle x\rangle$. Tali pacchetti sono gli unici stati per i quali il prodotto degli scarti $\Delta x\Delta p$ si riduce al valore minimo $\hbar/2$ previsto dal principio di indeterminazione.