Università degli Studi di Perugia - Corso di Laurea Triennale in Fisica

Corso di

MECCANICA QUANTISTICA

Sparpagliamento del pacchetto d'onde Gaussiano

1 Trasformata di Fourier

Si consideri un sistema fisico unidimensionale che, all'istante $t = 0$, sia descritto da un pacchetto d'onde Gaussiano di minima indeterminazione

$$\psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{\Delta x\sqrt{2\pi}}} e^{\frac{i}{\hbar}\langle p\rangle x}\, e^{-\frac{(x-\langle x\rangle)^2}{4(\Delta x)^2}} \ , \tag{1}$$

a cui corrisponde una densità di probabilità data da

$$|\psi(x,0)|^2 = \frac{1}{\Delta x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\langle x\rangle)^2}{2(\Delta x)^2}} \ . \tag{2}$$

La funzione d'onda (1) può essere scritta in termini della sua trasformata di Fourier $\varphi(p)$ attraverso la

$$\psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{h}} \int_{-\infty}^{+\infty} dp\, \varphi(p) e^{\frac{i}{\hbar}px} \ . \tag{3}$$

La trasformata di Fourier può essere calcolata esplicitamente svolgendo l' integrale

$$\varphi(p) = \frac{1}{\sqrt{h}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \psi(x,0)\, e^{-\frac{i}{\hbar}px} = \frac{1}{\sqrt{h\Delta x\sqrt{2\pi}}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-\frac{(x-\langle x\rangle)^2}{4(\Delta x)^2}}\, e^{-\frac{i}{\hbar}(p-\langle p\rangle)x} \ .$$

Introducendo la variabile $\xi = x - \langle x\rangle$, si ha

$$\varphi(p) = \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}(p-\langle p\rangle)\langle x\rangle}}{\sqrt{h\Delta x\sqrt{2\pi}}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi\, e^{-\frac{\xi^2}{4(\Delta x)^2}}\, e^{-\frac{i}{\hbar}(p-\langle p\rangle)\xi} \ .$$

Completando il quadrato, l'integrale diventa quello di una Gaussiana e si può calcolare direttamente

$$\begin{aligned}
\varphi(p) &= \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}(p-\langle p\rangle)\langle x\rangle}}{\sqrt{h\Delta x\sqrt{2\pi}}} e^{-\frac{(p-\langle p\rangle)^2}{\hbar^2}(\Delta x)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi\, e^{-\left(\frac{\xi}{2\Delta x}+\frac{i}{\hbar}(p-\langle p\rangle)\Delta x\right)^2} \\
&= \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}(p-\langle p\rangle)\langle x\rangle}}{\sqrt{h\Delta x\sqrt{2\pi}}} e^{-\frac{(p-\langle p\rangle)^2}{\hbar^2}(\Delta x)^2} \cdot 2\Delta x\sqrt{\pi} \ . \qquad (4)
\end{aligned}$$

Sfruttando il fatto che il pacchetto d'onde (1) è di minima indeterminazione, e quindi il prodotto degli scarti su (1) è proprio $\hbar/2$

$$\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2} \ ,$$

la (4) si può riscrivere così

$$\varphi(p) = \frac{1}{\sqrt{\Delta p\sqrt{2\pi}}} e^{-\frac{(p-\langle p\rangle)^2}{4(\Delta p)^2}}\, e^{-\frac{i}{\hbar}(p-\langle p\rangle)\langle x\rangle} \ , \tag{5}$$

e quindi la trasformata di Fourier di (1) è ancora di forma Gaussiana.

2 Evoluzione temporale

Supponiamo ora che il pacchetto d'onde descriva una particella libera. L'evoluzione temporale è allora data dall'operatore unitario

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} , \qquad \text{dove} \quad \hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} ,$$

che, applicato alla (3), dà

$$\psi(x,t) = \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}}{\sqrt{h}} \int_{-\infty}^{+\infty} dp\, \varphi(p) e^{\frac{i}{\hbar}px} = \frac{1}{\sqrt{h}} \int_{-\infty}^{+\infty} dp\, \varphi(p) e^{\frac{i}{\hbar}px} e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{p^2}{2m}t} ,$$

dato che le onde piane $e^{\frac{i}{\hbar}px}$ sono autofunzioni dell'Hamiltoniana di particella libera con autovalori $\frac{p^2}{2m}$. Usando la (5) si ha allora

$$\begin{aligned}
\psi(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{h\Delta p\sqrt{2\pi}}} \int_{-\infty}^{+\infty} dp\, e^{-\frac{(p-\langle p\rangle)^2}{4(\Delta p)^2} - \frac{i}{\hbar}(p-\langle p\rangle)\langle x\rangle + \frac{i}{\hbar}px - \frac{i}{\hbar}\frac{p^2}{2m}t} \\
&\equiv \frac{1}{\sqrt{h\Delta p\sqrt{2\pi}}} \int_{-\infty}^{+\infty} dp\, e^{-\alpha p^2 + \beta p + \gamma} ,
\end{aligned}$$

dove sono state definite le quantità (costanti rispetto a p)

$$\alpha \equiv \frac{1}{4(\Delta p)^2} + \frac{it}{2\hbar m} , \quad \beta \equiv \frac{\langle p\rangle}{2(\Delta p)^2} + \frac{i}{\hbar}(x - \langle x\rangle) , \quad \gamma \equiv -\frac{\langle p\rangle^2}{4(\Delta p)^2} + \frac{i}{\hbar}\langle p\rangle\langle x\rangle .$$

Completando il quadrato, si può allora scrivere l'integrale in forma Gaussiana e calcolarlo

$$\begin{aligned}
\psi(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{h\Delta p\sqrt{2\pi}}} e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}+\gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} dp\, e^{-\left(\sqrt{\alpha}p - \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{h\Delta p\sqrt{2\pi}}} e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}+\gamma} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\hbar\Delta p\alpha\sqrt{2\pi}}} e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}+\gamma} .
\end{aligned}$$

Si ha

$$2\hbar\Delta p\alpha = \Delta x + \frac{i\Delta p}{m}t = \Delta x + \frac{i\hbar}{2m\Delta x}t ,$$

e con un po' di algebra si trova

$$|\psi(x,t)|^2 = \frac{1}{\Delta x_t\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\langle x\rangle_t)^2}{2(\Delta x_t)^2}} , \tag{6}$$

dove sono state introdotte le quantità

$$\langle x\rangle_t = \langle x\rangle + \frac{\langle p\rangle}{m}t , \qquad (\Delta x_t)^2 = (\Delta x)^2 + \frac{(\Delta p)^2 t^2}{m^2} = (\Delta x)^2 + \frac{\hbar^2 t^2}{4m^2(\Delta x)^2} . \tag{7}$$

Quindi, come si vede dalle (6) e (7), il pacchetto d'onda è rimasto di forma Gaussiana, si sparpaglia nel tempo con legge quadratica ed il suo baricentro segue la legge classica. Dato che $\hat{p}$ e $\hat{p}^2$ commutano con l'Hamiltoniana, si ha invece che $\Delta p_t = \Delta p$.

Si noti che Δx_t e Δp_t non soddisfano più alla relazione di minima indeterminazione,

$$\Delta x_t \Delta p_t \neq \frac{\hbar}{2} ,$$

e quindi il pacchetto non è più di minima indeterminazione.