Università degli Studi di Perugia - Corso di Laurea Triennale in Fisica

Corso di

Meccanica Quantistica

Componenti di $\vec{L}$ in coordinate sferiche

Indichiamo con $\hat{e}_r$, $\hat{e}_\theta$, $\hat{e}_\varphi$ i versori tangenti alle linee coordinate r, θ e φ. I vettori $\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}$, $\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}$, $\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}$ hanno le stesse direzioni e i loro versori sono quindi $\hat{e}_r$, $\hat{e}_\theta$, $\hat{e}_\varphi$. Dalle espressioni di $x,\ y,\ z$ in coordinate sferiche, cioè da

$$\vec{r} = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$$

segue quindi

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial r} = \hat{e}_r \ , \qquad \frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta} = r\,\hat{e}_\theta \ , \qquad \frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} = r\sin\theta\,\hat{e}_\varphi$$

dove

$$\begin{cases} \hat{e}_r = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta) \ , \\ \hat{e}_\theta = (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, -\sin\theta) \ , \\ \hat{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0) \ . \end{cases}$$

$\hat{e}_r$, $\hat{e}_\theta$, $\hat{e}_\varphi$ formano una terna ortogonale sinistrorsa di versori (cioè: $\hat{e}_r \times \hat{e}_\theta = \hat{e}_\varphi$, $\hat{e}_\theta \times \hat{e}_\varphi = \hat{e}_r$, $\hat{e}_\varphi \times \hat{e}_r = \hat{e}_\theta$). Si ha inoltre

$$\hat{e}_r \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial r}\cdot\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r} \ , \qquad \hat{e}_\theta \cdot \vec{\nabla} = \frac{1}{r}\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\cdot\vec{\nabla} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} \ , \qquad \hat{e}_\varphi \cdot \vec{\nabla} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\cdot\vec{\nabla} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} \ .$$

Per cui il gradiente in coordinate sferiche è dato da:

$$\vec{\nabla} = \hat{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \hat{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \hat{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} \ .$$

Per $\vec{L}$ allora segue:

$$\begin{aligned} \vec{L} = -i\hbar\,\vec{r}\times\vec{\nabla} &= -i\hbar\, r\,\hat{e}_r \times \left(\hat{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \hat{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \hat{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) \\ &= i\hbar\left(-\hat{e}_\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \hat{e}_\theta\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) \ , \end{aligned}$$

in cui ogni dipendenza da r è scomparsa, perciò possiamo metterci sulla sfera unitaria ($r = 1$). Dalle componenti cartesiane di $\hat{e}_\theta$ ed $\hat{e}_\varphi$, seguono le espressioni di L_x, L_y e L_z in coordinate sferiche:

$$L_x = i\hbar\left(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) \ , \quad L_y = i\hbar\left(-\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) \ , \quad L_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi} \ .$$

Inoltre si possono definire gli operatori

$$L_\pm \equiv L_x \pm iL_y = \hbar e^{\pm i\varphi}\left(\pm\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) \ .$$

Infine dalle identità:

$$\hat{e}_\varphi\cdot\frac{\partial\hat{e}_\varphi}{\partial\theta} = \hat{e}_\varphi\cdot\frac{\partial\hat{e}_\theta}{\partial\theta} = \hat{e}_\theta\cdot\frac{\partial\hat{e}_\theta}{\partial\varphi} = 0 \ , \qquad \hat{e}_\theta\cdot\frac{\partial\hat{e}_\varphi}{\partial\varphi} = -\cos\theta \ ,$$

segue l'espressione per $\vec{L}^2$:

$$\vec{L}^2 = \vec{L} \cdot \vec{L} = -\hbar^2 \left(-\hat{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{e}_\theta \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \cdot \left(-\hat{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{e}_\theta \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$$
$$= -\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \cot\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) = -\hbar^2 \left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \ .$$