Università degli Studi di Perugia - Corso di Laurea Triennale in Fisica

Corso di

MECCANICA QUANTISTICA

Teorema di Dirac

Autovalori e autostati di un operatore Hermitiano che soddisfa ad un'equazione algebrica

Consideriamo un operatore Hermitiano $\hat{A}$ che soddisfa ad un' equazione algebrica del tipo

$$\varphi(\hat{A}) = \hat{A}^n + a_1\hat{A}^{n-1} + a_2\hat{A}^{n-2} + \cdots + a_n = 0 \ , \qquad (\varphi(\hat{A})\psi = 0) \ , \tag{1}$$

dove gli $a_i, \ i = 1, \ldots, n$ sono dei coefficienti numerici. Supponiamo che sia la più semplice equazione algebrica soddisfatta da $\hat{A}$, cioè quella di grado più basso. Allora si ha che:

a) il numero degli autovalori di $\hat{A}$ è n,

b) gli autovalori di $\hat{A}$ sono le soluzioni dell' equazione algebrica e sono tutti diversi.

Mostreremo poi come si costruisce un generico stato di ψ dagli autostati di $\hat{A}$.

Prova di **a)**.

Denotiamo con $c_r, \ r = 1, \ldots, n$ le soluzioni dell'equazione algebrica, per il teorema fondamentale dell'algebra si può scrivere $\varphi(\hat{A})$ come

$$\varphi(\hat{A}) = (\hat{A} - c_1)(\hat{A} - c_2)\ldots(\hat{A} - c_n) = 0 \ , \tag{2}$$

$\hat{A}$ si può trattare come una variabile algebrica ordinaria, perché non c'è nessuna quantità in $\varphi(\hat{A})$ che non commuta con $\hat{A}$. Definiamo $\chi_r(\hat{A})$ secondo la

$$\chi_r(\hat{A})(\hat{A} - c_r) \equiv \varphi(\hat{A}) \ , \qquad r = 1, 2, \ldots, n \ .$$

Si ha

$$\chi_r(\hat{A})(\hat{A} - c_r)\psi = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \hat{A}\chi_r(\hat{A})\psi = c_r\chi_r(\hat{A})\psi \ , \qquad r = 1, 2, \ldots, n \ . \tag{3}$$

inoltre $\chi_r(\hat{A})\psi \neq 0$ perchè altrimenti $\varphi(\hat{A}) = 0$ non sarebbe la più semplice equazione algebrica soddisfatta da $\hat{A}$. Dalla (3) segue che gli n c_r sono gli autovalori di $\hat{A}$.

Prova di **b)**.

Nessun altro numero può essere autovalore di $\hat{A}$, infatti, se λ è l'autovalore dell'autostato u di $\hat{A}$

$$\hat{A}u = \lambda u \ ,$$

si ha

$$\varphi(\hat{A})u = \varphi(\lambda)u = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi(\lambda) = 0 \ ,$$

cioè λ è uno degli c_r.

Dimostriamo ora che tutti gli autovalori c_r sono diversi. Supponiamo per assurdo che c_s si presenti m volte con $m > 1$. Allora si può definire la funzione $\theta(\hat{A})$ secondo la

$$\varphi(\hat{A}) \equiv (\hat{A} - c_s)^m\theta(\hat{A}) \ .$$

Quindi, su uno stato generico ψ

$$\varphi(\hat{A})\psi = (\hat{A} - c_s)^m \theta(\hat{A})\psi = 0 \ .$$

Gli c_s sono reali essendo autovalori di un operatore Hermitiano, quindi $\hat{A} - c_s$ è Hermitiano e si ha

$$(\hat{A} - c_s)^m \theta(\hat{A})\psi = 0 \quad \Longrightarrow \quad (\hat{A} - c_s)\theta(\hat{A})\psi = 0 \ .$$

Infatti, dimostriamo che se $\hat{O}$ è un operatore Hermitiano e $\hat{O}^m\psi = 0$, allora $\hat{O}\psi = 0$. Dimostriamolo per induzione. Per $m = 2$ è ovvio

$$(\psi, \hat{O}^2\psi) = 0 \quad \Longrightarrow \quad (\hat{O}\psi, \hat{O}\psi) = ||\hat{O}\psi||^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \hat{O}\psi = 0 \ , \tag{4}$$

perchè se la norma di uno stato è nulla, è nullo lo stato. Per $m > 2$ poniamo $\hat{O}^{m-2}\psi \equiv \eta$ e dimostriamo che se vale per m vale per $m-1$. Si ha $\hat{O}^m\psi = \hat{O}^2\eta = 0$, quindi, per la (4), $\hat{O}\eta = 0$, cioè vale per $m-1$, $\hat{O}^{m-1}\psi = 0$. Siccome vale per $m = 2$ vale $\forall m$. Quindi $(\hat{A}-c_s)\theta(\hat{A})\psi = 0$, ma questo contraddice l'ipotesi che la $\varphi(\hat{A}) = 0$ sia la più semplice equazione algebrica soddisfatta da $\hat{A}$, quindi le c_r sono tutte diverse.

$\chi_r(c_r)$ è il numero che si ottiene da $\chi_r(\hat{A})$ ponendo c_r al posto di $\hat{A}$, $\chi_r(c_r) \neq 0$ perchè le c_r sono tutte diverse. La quantità

$$\sum_r \frac{\chi_r(\hat{A})}{\chi_r(c_r)} - 1 \tag{5}$$

è nulla quando poniamo al posto di $\hat{A}$, c_s. Infatti se $s \neq r$ $\chi_r(c_s) = 0$, mentre se $s = r$ si ha $\chi_r(c_r)/\chi_r(c_r) = 1$. Ma gli c_r sono n e siccome

$$\sum_r \frac{\chi_r(\hat{A})}{\chi_r(c_r)} - 1 = 0$$

è un'equazione solo di grado $n - 1$, l'operatore (5) è l'operatore identicamente nullo. Quindi

$$\psi = \sum_r \frac{\chi_r(\hat{A})}{\chi_r(c_r)}\psi \ . \tag{6}$$

Ma $\chi_r(\hat{A})\psi$, che non è zero, è autostato di $\hat{A}$ e quindi (6) è lo sviluppo finito in termini di autostati di $\hat{A}$ di un generico stato ψ.