# PLS 2016 - La Fisica a Perugia
# Soluzioni del test iniziale

1. Quale delle seguenti diseguaglianze è corretta?

   ☐ a) $9^{1/9} < 6^{1/6} < 3^{1/3}$ ☐ b) $6^{1/6} < 9^{1/9} < 3^{1/3}$ ☐ c) $9^{1/9} < 3^{1/3} < 6^{1/6}$
   ☐ d) $3^{1/3} < 9^{1/9} < 6^{1/6}$ ☐ e) $6^{1/6} < 3^{1/9} < 9^{1/9}$

### Soluzione

I tre numeri $3^{1/3}$, $6^{1/6}$, $9^{1/9}$ possono essere portati in forma confrontabile elevando al minimo comune denominatore delle potenze, ovvero 18. Avremo

$$\left(3^{1/3}\right)^{18} = 3^6\,, \qquad \left(6^{1/6}\right)^{18} = 6^3\,, \qquad \left(9^{1/9}\right)^{18} = 9^2\,.$$

Da tutti e tre è possibile estrarre il fattore comune $3^3$, così da ridurre al confronto dei soli fattori rimanenti l'ordinamento dei valori,

$$\left(3^{1/3}\right)^{18} = 3^6 = 3^3\,3^3\,, \qquad \left(6^{1/6}\right)^{18} = 6^3 = 3^3\,2^3\,, \qquad \left(9^{1/9}\right)^{18} = 9^2 = 3^4 = 3^3\,3\,.$$

poiché $3 < 2^3 < 3^3$, avremo che l'ordine dei tre numeri è

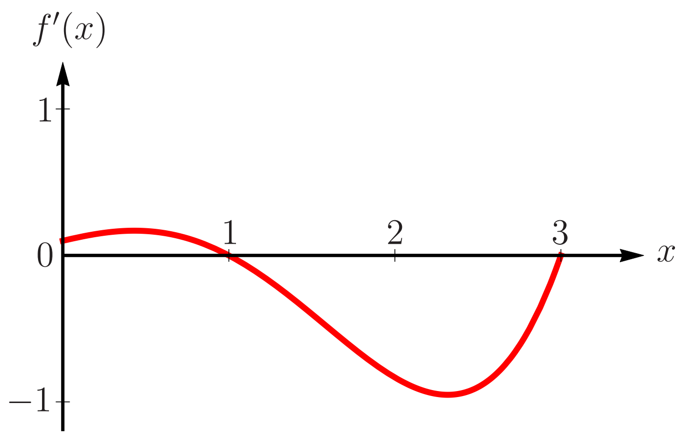
$$9^{1/9} < 6^{1/6} < 3^{1/3}\,.$$

La risposta corretta è la **a**.

---

2. (**Solo V**) In figura è rappresentata la derivata prima, $f'(x)$, di una funzione $f(x)$, continua nell'intervallo $[0, 3]$ e derivabile in $(0, 3)$. Quale delle seguenti diseguaglianze, tra i valori della funzione $f(x)$ e non della derivata, è corretta?

   ☐ a) $f(0) < f(1) < f(3)$
   ☐ b) $f(1) < f(3) < f(0)$
   ☐ c) $f(3) < f(0) < f(1)$
   ☐ d) $f(0) < f(3) < f(1)$
   ☐ e) $f(3) < f(1) < f(0)$




### Soluzione

Poiché che la funzione $f(x)$ è continua e derivabile nell'intervallo $[0, 3]$, si ha che l'integrale della sua derivata prima su ogni sotto-intervallo $[a, b] \subset [0, 3]$ vale

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)\,.$$

Dal grafico è possibile dedurre il segno degli integrali sugli intervalli $[0,1]$, $[1,3]$ e $[0,3]$, ovvero

$$\int_0^1 f'(x)dx = f(1) - f(0) > 0\,, \qquad \int_1^3 f'(x)dx = f(3) - f(1) < 0\,, \qquad \int_0^3 f'(x)dx = f(3) - f(0) < 0\,,$$

da cui si hanno le disuguaglianze

$$f(1) > f(0)\,, \qquad f(3) < f(1)\,, \qquad f(3) < f(0)\,.$$

Si osserva che $f(0)$ è maggiore di $f(3)$ (ultima disuguaglianza) e minore di $f(1)$ (prima disuguaglianza), ovvero

$$f(3) < f(0) < f(1)\,.$$

La risposta corretta è la **c**.

---

3. Si indichi quale delle seguenti è l'equazione della retta passante per l'origine e perpendicolare alla retta tangente alla parabola $y = 3 + x^2$ nel punto di ascissa $x = 1$.

☐ a) $y + 2x + 1 = 0$ ☐ b) $2y + x = 0$ ☐ c) $y + 2x = 0$
☐ d) $y - 2x = 0$ ☐ e) $y - x/2 = 0$

### Soluzione

Il punto appartenente alla parabola $y = 3 + x^2$ di ascissa $x = 1$ ha coordinate $(1,4)$. La retta tangente alla parabola in tale punto ha coefficiente angolare

$$m = y'\big|_{x=1} = 2x|_{x=1} = 2\,.$$

La retta passante per l'origine perpendicolare a tale retta ha equazione

$$y = -\frac{1}{m}x = -\frac{1}{2}x \qquad \Rightarrow \qquad 2y + x = 0\,.$$

La risposta corretta è la **b**.

---

4. Manuela e Simone hanno ciascuno un mazzo di dieci carte numerate da 1 a 10. Se entrambi estraggono a caso una carta dal loro mazzo qual è la probabilità che i due numeri estratti siano l'uno la radice quadrata dell'altro?

☐ a) 0,03 ☐ b) 0,05 ☐ c) 0,06 ☐ d) 0,08 ☐ e) 0,10

### Soluzione

Le coppie $(n_1, n_2) \in \{1, 2, \ldots, 10\} \times \{1, 2, \ldots, 10\}$ che verificano la condizione $n_1 = \sqrt{n_2}$ o $n_2 = \sqrt{n_1}$ sono cinque, ovvero:

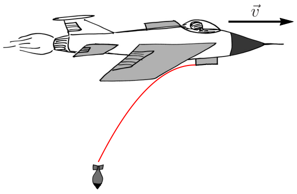
$$(1,1)\,, \quad (2,4)\,, \quad (3,9)\,, \quad (4,2)\,, \quad (9,3)\,.$$

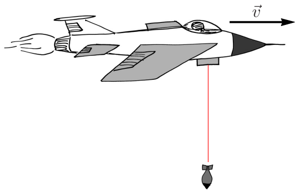
Il numero totale di coppie possibili è $10 \times 10 = 100$, quindi la probabilità che i due numeri estratti siano l'uno la radice quadrata dell'altro è

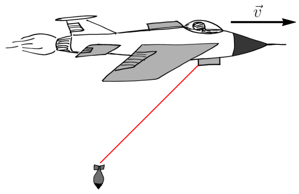
$$P = \frac{5}{100} = 0.05\,.$$

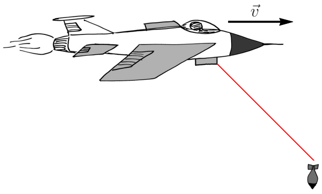
La risposta corretta è la **b**.

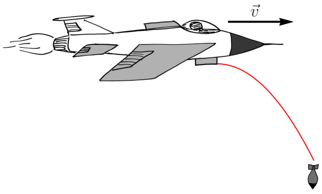
5. Da un aereo, che viaggia orizzontalmente alla velocità costante $\vec{v}$, viene sganciata una bomba, che cade per gravità. Trascurando l'attrito dell'aria, quale delle seguenti figure rappresenta meglio la traiettoria della bomba vista da un osservatore a terra?

☐ a) 


☐ b) 


☐ c) 


☐ d) 


☐ e) 


## Soluzione

Nel sistema di riferimento dell'osservatore, fermo a terra, la bomba ha velocità

$$\vec{v}_b(t) = \vec{v} + (0, 0, -gt) = (v, 0, -gt)\,,$$

dove $\vec{v}$ è la velocità dell'aereo, che possiamo considerare orientata nella direzione $x$ e il secondo vettore a secondo membro descrive l'accelerazione, lungo la verticale $z$, dovuta alla forza di gravità cui la bomba è soggetta. La legge oraria è

$$\vec{r}_b(t) = (vt, 0, h - gt^2/2)\,, \qquad \begin{cases} x(t) = vt \\ y(t) = 0 \\ z(t) = h - gt^2/2 \end{cases}$$

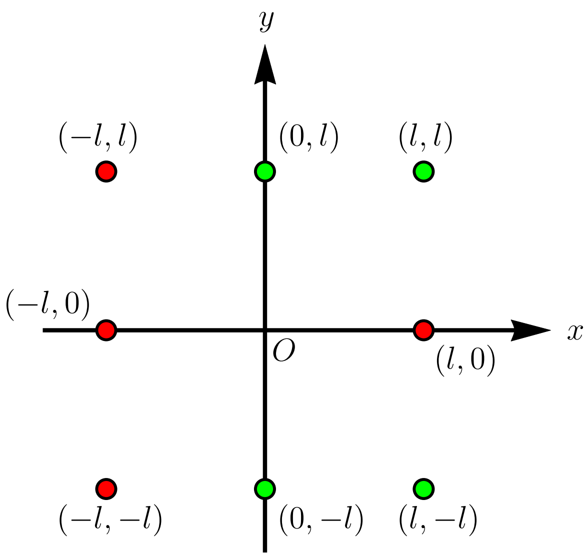
dove $h$ è la quota dell'aereo, $t = 0$ e $x = 0$ sono l'istante e la posizione dell'aereo in $x$ in cui la bomba viene sganciata. La traiettoria della bomba nel piano $xz$ ha equazione

$$z = h - \frac{1}{2}gt^2 = h - \frac{g}{2v^2}x^2\,,$$

è quindi una parabola che parte dal massimo, in $x = 0$, per poi scendere.
La risposta corretta è la **e**.

---

6. Quattro cariche positive $+q$, in rosso, e quattro negative $-q$, in verde, $(q > 0)$ sono disposte come mostrato in figura. Qual è il campo risultante nell'origine?




☐ a) $\vec{E} = \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{2\sqrt{2}}{l^2}, 0\right)$

☐ b) $\vec{E} = \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\sqrt{2}}{l^2}, 0\right)$

☐ c) $\vec{E} = \left(0, \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\sqrt{2}}{l^2}\right)$

☐ d) $\vec{E} = \left(-\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\sqrt{2}}{l^2}, 0\right)$

☐ e) $\vec{E} = \left(-\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{2\sqrt{2}}{l^2}, 0\right)$

### Soluzione

Nell'origine la risultante delle cariche disposte lungo gli assi si annulla, in quanto sono due coppie di cariche uguali e disposte simmetricamente rispetto all'origine. Rimangono le cariche ai vertici del quadrato, i cui vettori posizione hanno versori $\hat{r}_1 = \left(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right)$, $\hat{r}_2 = \left(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right)$, $\hat{r}_3 = \left(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}\right)$, $\hat{r}_4 = \left(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}\right)$ e lo stesso modulo $|\vec{r}_1| = |\vec{r}_2| = |\vec{r}_3| = |\vec{r}_4| = \sqrt{2}\,l$, per cui si ha

$$
\begin{aligned}
\vec{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(-q\frac{-\hat{r}_1}{|r_1|^2} + q\frac{-\hat{r}_2}{|r_2|^2} + q\frac{-\hat{r}_3}{|r_3|^2} - q\frac{-\hat{r}_4}{|r_4|^2}\right) \\
\vec{E} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{2\,l^2}\left[\left(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right) + \left(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}\right) + \left(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right) + \left(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}\right)\right] \\
\vec{E} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{2l^2}\left(4/\sqrt{2}, 0\right) \\
\vec{E} &= \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\sqrt{2}}{l^2}, 0\right)\,.
\end{aligned}
$$

La risposta corretta è la **b**.

---

7. Il lavoro necessario per estendere una molla di costante elastica $C$ di 20 cm è pari alla metà di quello necessario per estendere di 10 cm una seconda molla. Qual è la costante elastica di quest'ultima?

   ☐ a) $2\,C$ ☐ b) $4\,C$ ☐ c) $8\,C$ ☐ d) $C/2$ ☐ e) $C$

### Soluzione

Il lavoro necessario per estendere una molla di costante elastica $C$ di una lunghezza $x$ è

$$L = \frac{1}{2}Cx^2\,.$$

Il lavoro sulla prima molla è

$$L_1 = \frac{1}{2}C(20\,\mathrm{cm})^2\,,$$

ed è la metà di

$$L_2 = \frac{1}{2}C_2(10\,\mathrm{cm})^2\,,$$

ovvero, del lavoro necessario per estendere di 10 cm una seconda molla di costante elastica $C_2$. La relazione tra le costanti elastiche è

$$\frac{1}{2}L_2 = L_1 \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{4}C_2(10\,\mathrm{cm})^2 = \frac{1}{2}C(20\,\mathrm{cm})^2 \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{4}C_2 = 2C \quad\Rightarrow\quad C_2 = 8C\,.$$

La risposta corretta è la **c**.

---

8. Due sistemi planetari, ciascuno costituito da una stella ed un solo pianeta, hanno le seguenti caratteristiche:
   - le orbite sono circolari e con lo stesso raggio, $R$;
   - i momenti angolari sono l'uno il doppio dell'altro, $\vec{L}_1 = 2\vec{L}_2$ (ne consegue che lo orbite giacciono su piani paralleli);
   - i periodi di rivoluzione sono l'uno il triplo dell'altro, $T_1 = 3T_2$;

   in che rapporto sono le masse dei pianeti?

   ☐ a) $M_1 = 6M_2$ ☐ b) $M_1 = 2M_2$ ☐ c) $M_1 = 2M_2/3$
   ☐ d) $M_1 = 3M_2/2$ ☐ e) $M_1 = M_2/6$

## Soluzione

I moduli dei momenti angolari sono

$$L_1 = M_1 v_1 R\,, \qquad L_2 = M_2 v_2 R\,,$$

dalla condizione $L_1 = 2L_2$, si ha

$$M_1 v_1 = 2M_2 v_2\,.$$

I periodi sono

$$T_1 = \frac{2\pi R}{v_1}\,, \qquad T_2 = \frac{2\pi R}{v_2}\,,$$

dalla condizione $T_1 = 3T_2$, si ha $v_2 = 3v_1$, che sostituita nella relazione tra le quantità di moto dà

$$M_1 v_1 = 2M_2 v_2 = M_1 v_1 = 6M_2 v_1\,,$$

ovvero per le masse

$$M_1 = 6M_2\,.$$

La risposta corretta è la **a**.