Università degli Studi di Perugia
Facoltà di Medicina e Chirurgia

Fisica

Leonello Servoli

Leonello.servoli@pg.infn.it

Tel.: 0039-348-3345847

http://www.fisica.unipg.it/~servoli

Il Corso: istruzioni per l'uso

Prossime lezioni:

22 ottobre	15-18	1
26 ottobre	15-18	2
28 ottobre	15-18	3
29 ottobre	15-18	4
4 novembre	15-18	5
5 novembre	15-18	6
6 novembre	15-18	6

Il movimento: dal come al perché

Per mettere in moto un corpo fermo
Per fermare un corpo in moto

Per <u>variare</u> un moto
bisogna intervenire dall'esterno

Variazione di moto ⟷ Causa esterna

Solo l'intervento di una causa esterna può

far iniziare un moto — far cessare un moto

far variare un moto (variando la velocità)

Una causa esterna non può essere altro che

una interazione con un "altro corpo"

es. interaz. a contatto → sforzo muscolare, attrito, ecc.
interaz. a distanza → gravità, attraz.magnetica, ecc.

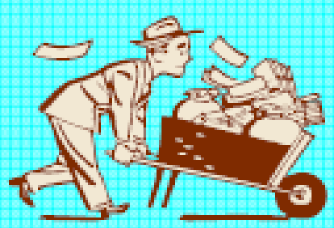
Cos'è una forza?

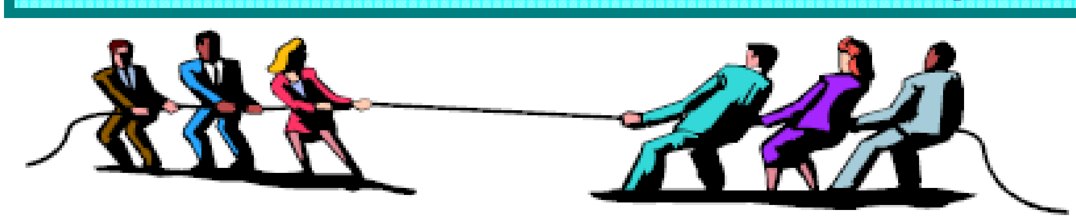
Forza = qualunque causa esterna che produce una variazione dello stato di moto o di quiete di un corpo

Es.

Alcuni fatti sperimentali dall'esperienza quotidiana:

Con una forza muscolare si riesce a spostare un corpo "leggero" ma non un corpo troppo "pesante".
Per rallentare un corpo in moto bisogna trattenerlo a forza o farlo muovere su una superficie ruvida.
Una superficie riesce a sostenere un corpo "pesante" se è molto solida e se il peso è ben distribuito su di essa.
Se un corpo viene tirato o spinto da parti opposte può deformarsi, rompersi o muoversi in una delle due direzioni a seconda del materiale di cui è composto e della forza trainante.





3 principi della Dinamica

Le Forze

E' di Newton (1642-1727) l'idea che le cause dei moti siano le forze.

Sperimentalmente si nota che la forza è un vettore.

Quando si spinge o si tira un oggetto si esercita su di esso una

$$\text{forza} \quad \vec{F}$$

I principi della dinamica (1)

Galileo ha scoperto il I° Principio della Dinamica (detto principio di inerzia), la cui formulazione attuale è dovuta a Newton

Un corpo non soggetto a forze o è fermo o si muove di moto rettilineo uniforme

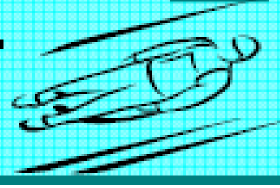
Principio d'inerzia

Un corpo "naturalmente" è fermo
o si sta muovendo di moto rettilineo uniforme ($\vec{v}$ = costante)

Questo non è intuitivo!

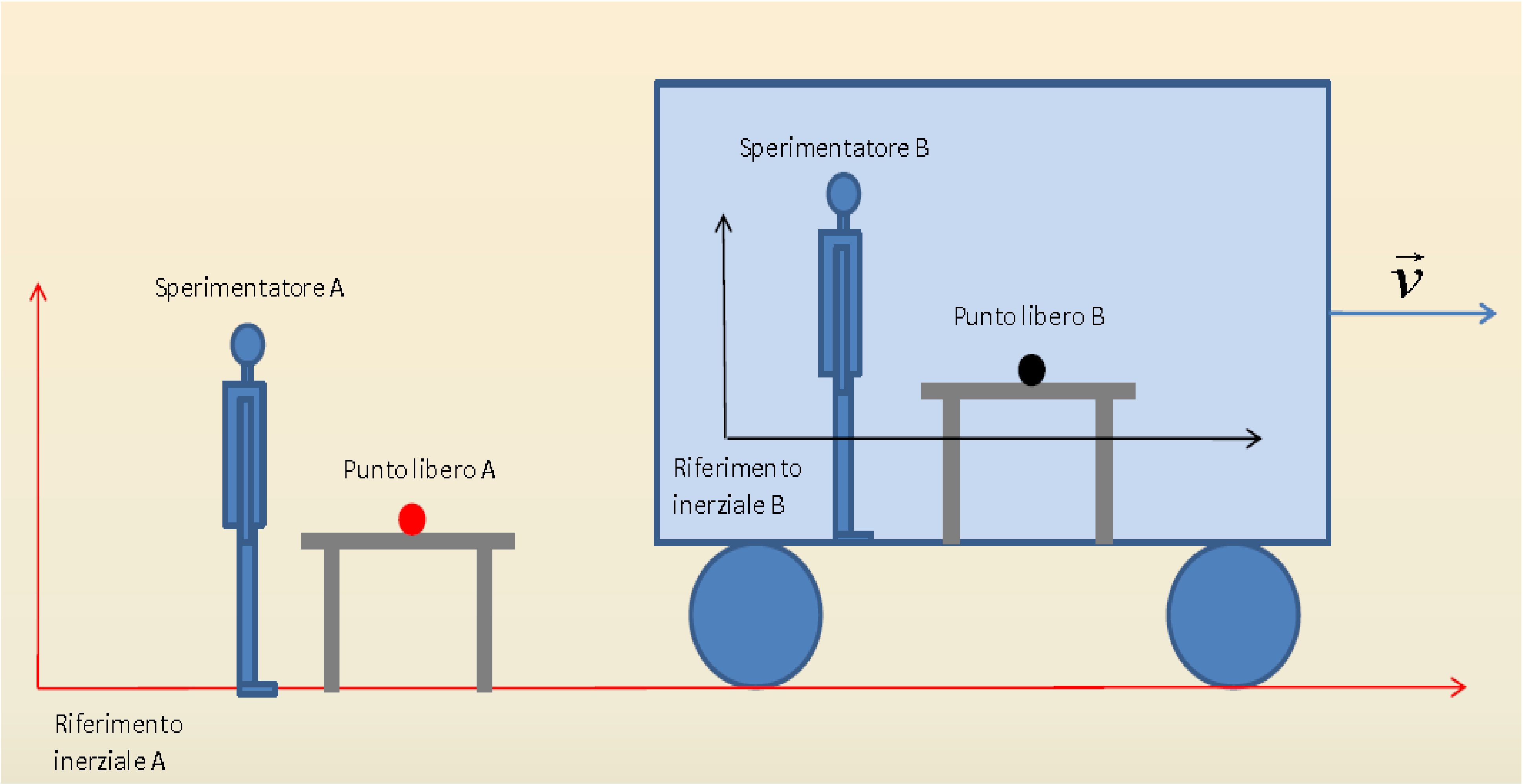
Es.

Esperienza: un corpo in moto dopo un po' si ferma.
Ma sulla Terra nessun corpo è isolato: c'è sempre attrito.
Riducendo l'attrito si prolunga il moto.
Se non ci fosse attrito il moto continuerebbe all'infinito.

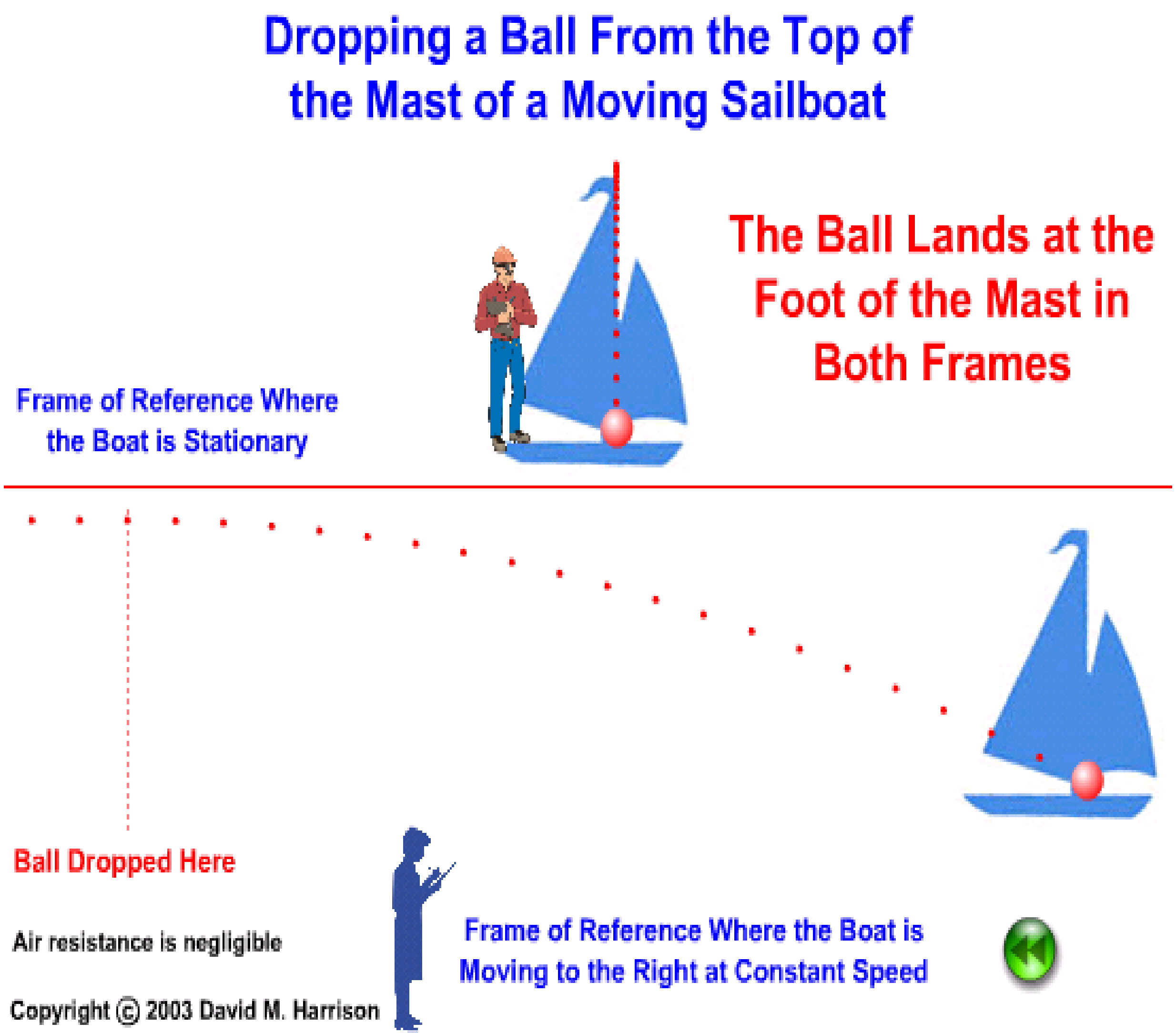


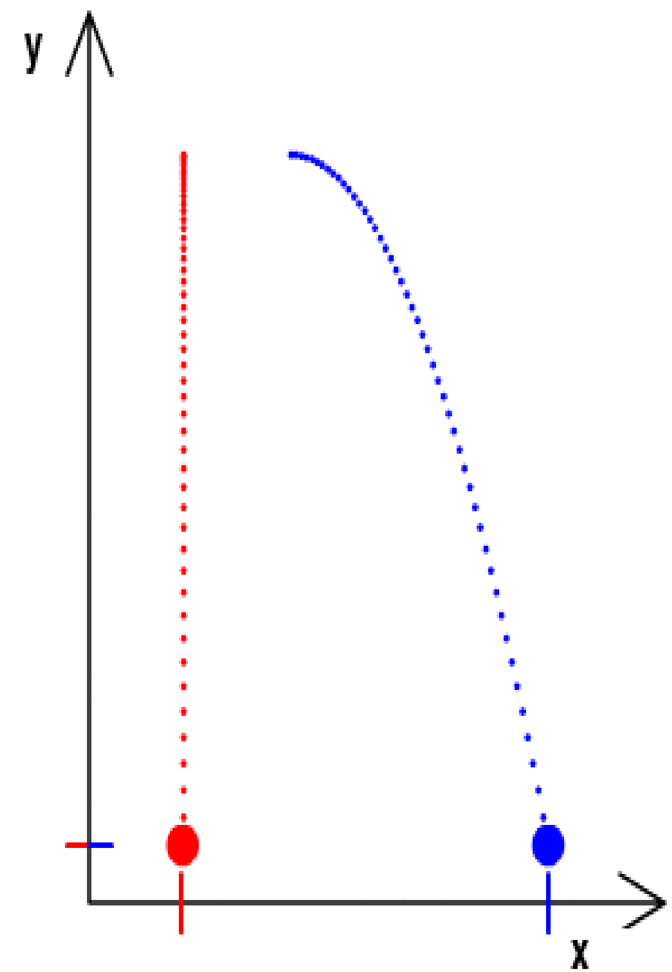
No forza → No variazione stato di moto
→ No variazione di velocità → No accelerazione
→ Quiete o moto rettilineo uniforme

Principio d'inerzia



Principio d'inerzia





I principi della dinamica (2)

Le spiegazioni scientifiche, nella opinione di Newton, non sono più legate ai semplici concetti di moto, ma sono pensate piuttosto come relazioni fra più elementi che possono essere misurati (le osservabili).

Newton, per produrre il proprio lavoro, non ha una matematica sufficiente e quindi inventa il *calcolo differenziale* connettendo, in maniera anche formalmente corretta, le tre osservabili cinematiche:

spazio, velocità ed accelerazione

I principi della dinamica (2b)

Condizioni al contorno

Accelerazione $a(t)$

⇓

Velocità $v(t) = \int a(t)\,dt + v_0$

⇓

Spazio $s(t) = \int v(t)\,dt + s_0 = \int \left(\int a(t)\,dt + v_0 \right) dt + s_0$

I principi della dinamica (3)

Quando ad un oggetto è applicata una forza l'oggetto acquista una accelerazione nella stessa direzione della forza (II° Principio della Dinamica). Le intensità di F e di a sono proporzionali, se si raddoppia F, raddoppia a.

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$\left[\vec{F}\right] = kg\ m\ s^{-2} = N \quad \text{MKS} \qquad \left[\vec{F}\right] = g\ cm\ s^{-2} = dyne \quad \text{cgs}$$

I principi della dinamica (3a)

Il II° Principio della Dinamica dice che la forza è la causa e l'accelerazione è l'effetto.

La forza è causa dei moti perché produce un'accelerazione, la quale è la variazione nel tempo della velocità e quindi lo stato di moto del corpo cambia.

Newton e dyne

forza = massa · accelerazione | $F = ma$ | N

SI: Newton → 1 N = 1 kg · 1 m/s²

$$\downarrow 100000 \quad \downarrow 1000 \quad \downarrow 100$$

cgs: dyne → 1 dyne = 1 g · 1 cm/s²

1 N = forza che, applicata a un corpo di massa 1 kg, produce un'accelerazione di 1 m/s^2

1 dyne = forza che, applicata a un corpo di massa 1 g, produce un'accelerazione di 1 cm/s^2

Es.

$1\ N = 1\ kg \cdot 1\ m/s^2 = 10^3\ g \cdot 10^2\ cm/s^2 = 10^5\ dyne$

$1\ dyne = 1\ g \cdot 1\ cm/s^2 = 10^{-3}\ kg \cdot 10^{-2}\ m/s^2 = 10^{-5}\ N$

$\vec{F} = m\vec{a}$

Forza e accelerazione
sono grandezze vettoriali
direttamente proporzionali.
Il loro rapporto è la massa,
costante dipendente dal corpo in esame.

→ F/a = costante → MASSA

dipendente dal tipo (natura, forma, dimensioni) di corpo

PROPRIETA' INTRINSECA DEL CORPO

GRANDEZZA SCALARE FONDAMENTALE → Kg (MKS), g (cgs)

I principi della dinamica (4)

Se la forza è costante, dal II° Principio della Dinamica, l'accelerazione è costante e quindi il moto deve essere uniformemente accelerato, infatti (in una dimensione per semplicità

$$a = \frac{F}{m} = \cos t$$

$$\frac{dv}{dt} = a = \frac{F}{m}$$

$$dv = \frac{F}{m} dt \quad \Rightarrow \quad \int dv = \frac{F}{m} \int dt \quad \Rightarrow \quad v = \frac{F}{m} t$$

$$\frac{dx}{dt} = v = \frac{F}{m} t$$

$$dx = \frac{F}{m} t \, dt \quad \Rightarrow \quad \int dx = \frac{F}{m} \int t \, dt \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2$$

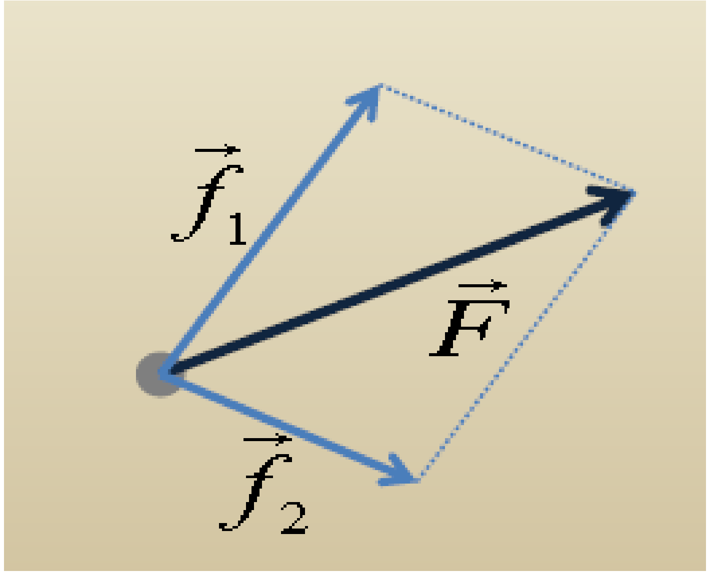
$$x = \frac{1}{2} a t^2$$

Equazione oraria del moto uniformemente accelerato

Il Principio di Sovrapposizione

Quando più forze sono applicate contemporaneamente ad un punto, l'effetto complessivo è uguale a quello che si ottiene applicando al punto la risultante (somma vettoriale) delle singole forze.

$$\vec{F} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \vec{f}_3 + \cdots$$



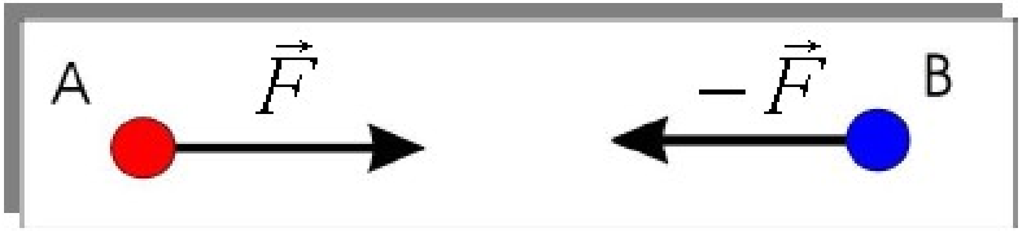
I principi della dinamica (5)

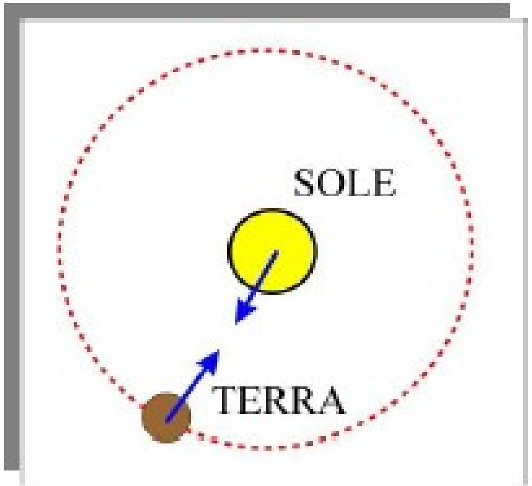
III° Principio della Dinamica
(principio di azione e reazione)

Se un corpo A esercita una forza $\vec{F}_{AB}$ su di un corpo B, quest'ultimo esercita su A una forza $\vec{F}_{BA}$ che ha lo stesso modulo e la stessa direzione di $\vec{F}_{AB}$, ma verso opposto

Principio di azione e reazione

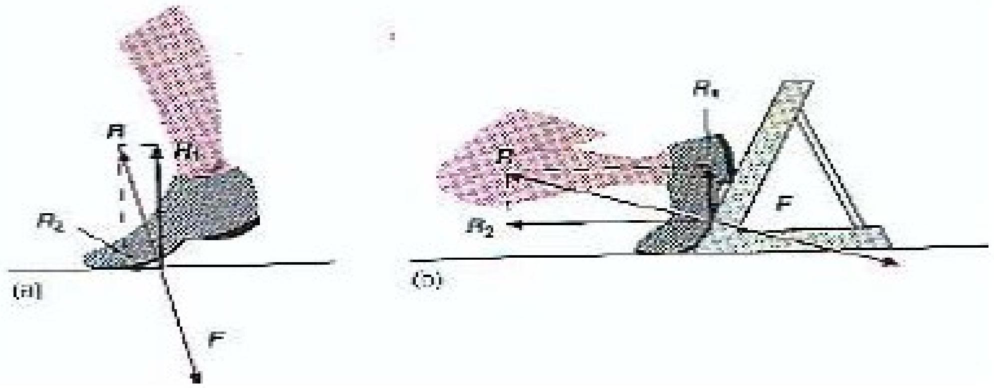
$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$





Es.

Esempi quotidiani:
- sostegno pavimento/sedia
- spinta "all'indietro"
- rinculo
- camminare, correre
- mezzi di trasporto



I principi della dinamica (6)

Le forze di azione e di reazione sono applicate su corpi diversi e quindi, in generale, *i loro effetti non si annullano.*

Lo stato di moto di un oggetto è determinato solo dalle forze che agiscono su di esso ed in generale le forze esercitate da un oggetto influenzano il moto di altri oggetti.

$$\text{III}^\circ \text{ Principio} \Rightarrow \sum \vec{F}_{\text{int}} = 0$$

I principi della dinamica (8)

Newton, usando il *principio di semplicità*, definisce il

sistema fisico come il minimo numero di corpi ed interazioni capaci di descrivere il dato sperimentale

Forza peso (1)

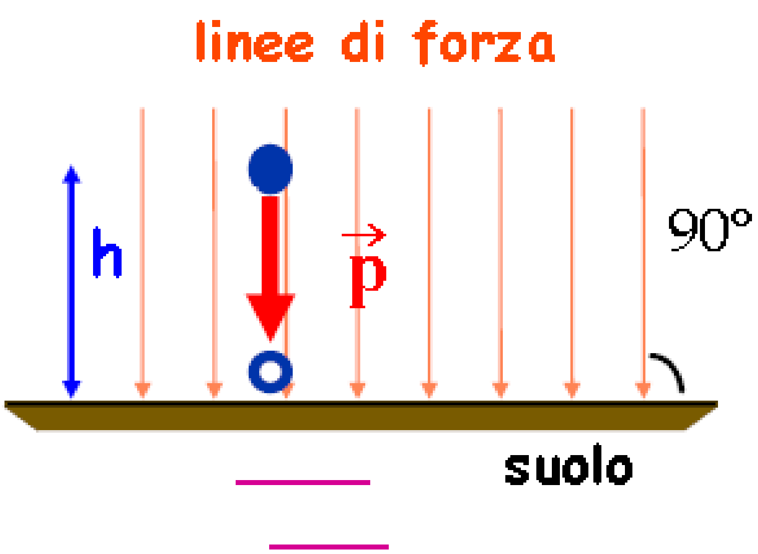
Dalle osservazioni sperimentali che l'accelerazione di gravità è la stessa per tutti gli oggetti che cadono, che è costante e che vale il II° Principio della Dinamica discende che deve esistere una forza costante, diretta verso il basso che agisce su tutti i corpi che cadono.

Forza peso (2)

Ogni corpo di massa m soggetto alla accelerazione di gravità g risente della forza peso diretta verticalmente verso il basso.

$$\vec{F} = m\vec{g} = \vec{p}$$

modulo	$\lvert p \rvert = m\,g$
direzione	verticale
verso	basso



Forza peso (3)

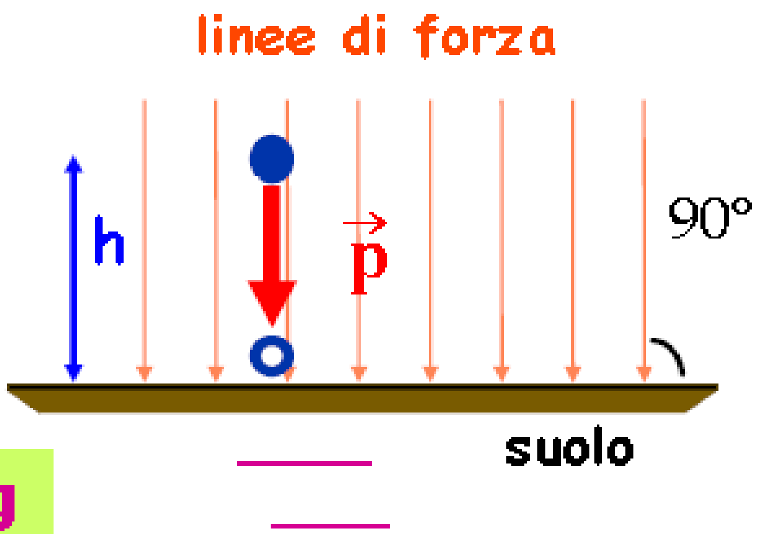
E' una forza costante

MOTO DI CADUTA
<u>sempre</u> uniformemente accelerato
con accelerazione $g = 9.8\ m/s^2$

$$v = g\,t$$
$$h = \frac{1}{2} g\,t^2$$

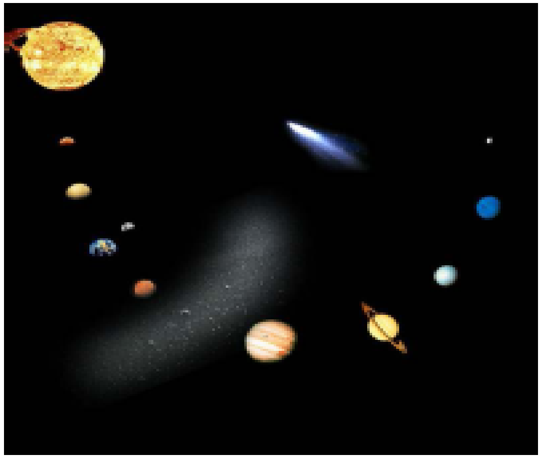
Tempo di arrivo al suolo: $t = \sqrt{2h/g}$
Velocità di arrivo al suolo: $v = \sqrt{2gh}$

Condizioni al contorno:
$s_0 = 0$
$v_0 = 0$



La gravitazione universale (1)

Poiché le forze sono responsabili del moto, se sappiamo scrivere la forza e conosciamo le *condizioni al contorno* (spazio e velocità iniziali), si può risolvere il moto.



Quindi la *COSMOLOGIA* (problema fondamentale della fisica da Aristotele in poi), cioè il moto dei pianeti è risolto se si scrive la forza con cui interagiscono due corpi fra loro.

La gravitazione universale (2)

I gravi in caduta libera con moto accelerato, ma pure i pianeti costretti a muoversi intorno al Sole e la Luna intorno alla Terra, provano l'esistenza di cause (le forze) che deviano i corpi materiali dalla condizione di moto rettilineo uniforme.
Newton dedusse il dato sperimentale che questa forza fosse unica e la chiamò di

Gravitazione Universale

ipotizzando che la stessa forza che provoca la caduta dei gravi fosse anche quella che costringe la Luna a percorrere un'orbita chiusa intorno alla Terra ed i pianeti a descrivere le orbite ellittiche intorno al Sole.

La gravitazione universale (3)

Il livello di generalizzazione è eccezionale

la luna "cade" sulla terra

come la mela

L'universo è fatto della stessa materia della terra e tutti i corpi materiali, terrestri e celesti, subiscono l'azione della stessa forza:

la gravitazione universale

La gravitazione universale (4)

Due corpi, dotati di massa, sono attratti da una forza diretta lungo la congiungente dei loro centri ed il cui modulo vale

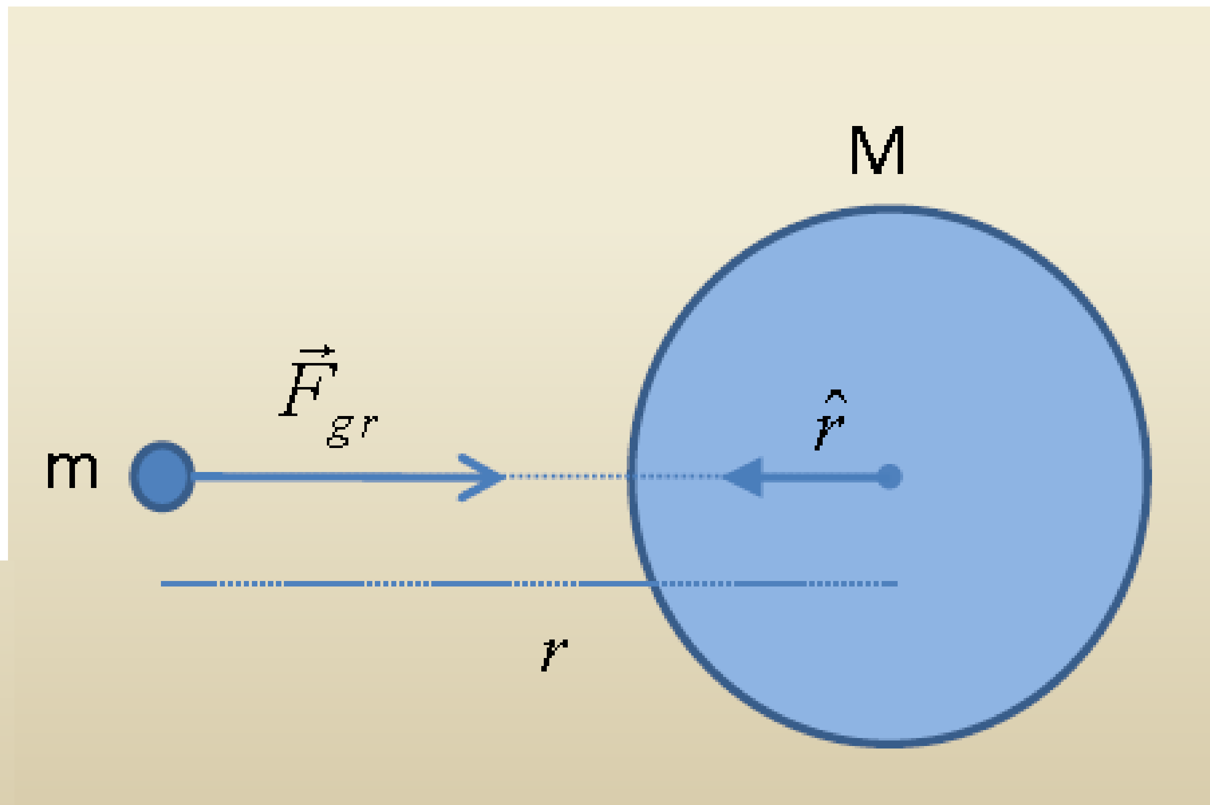
$$F = G\frac{M_1 M_2}{r^2}$$

$$G = 6.67\ 10^{-11} \quad Nm^2Kg^{-2}$$

G è la costante di gravitazione universale

Il Teorema di Newton

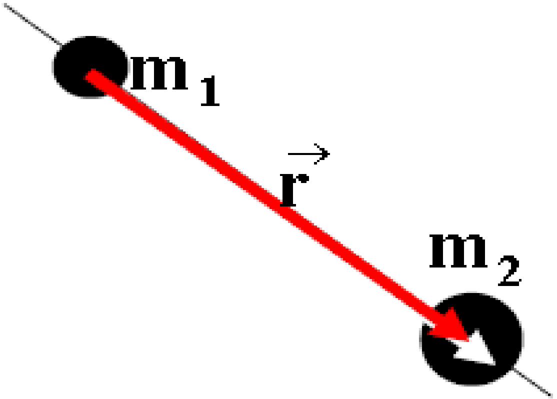
Una sfera omogenea di massa M esercita su un punto m (esterno alla sfera) la stessa forza che eserciterebbe se tutta la massa M della sfera fosse concentrata nel suo centro.



$$\vec{F}_{gr} = -G\frac{Mm}{r^2}\hat{r}$$

La gravitazione universale (5)

Tra due corpi di massa m_1 e m_2,
posti a distanza r,
si esercita sempre ⟶ *non solo sulla Terra!*
una forza di attrazione
- diretta lungo la congiungente tra i due corpi
- proporzionale alle due masse
- inversamente proporzionale al <u>quadrato</u> della loro distanza



LEGGE DI GRAVITAZIONE UNIVERSALE

$$\vec{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

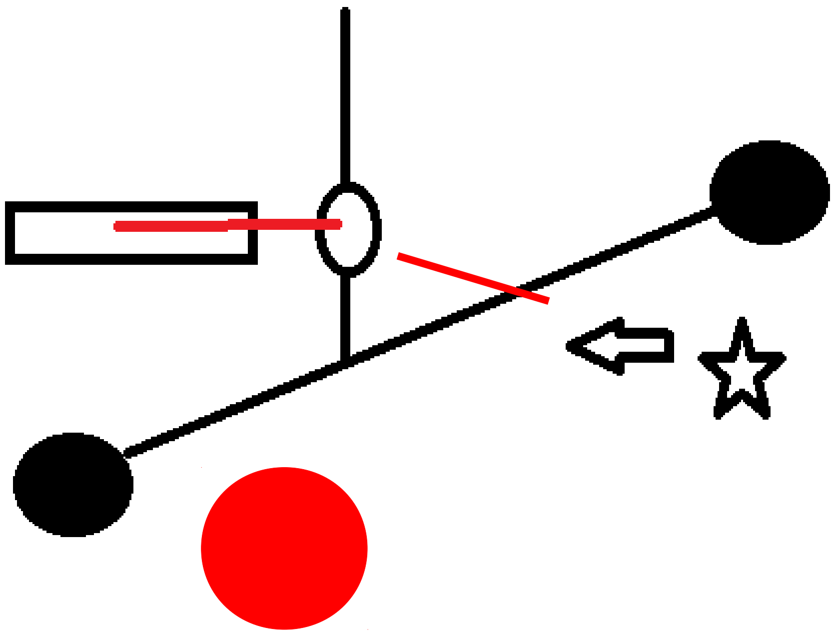
attrazione

$G = 6.67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2/kg^2$

... troppo piccola per essere osservata tra corpi "normali" ...

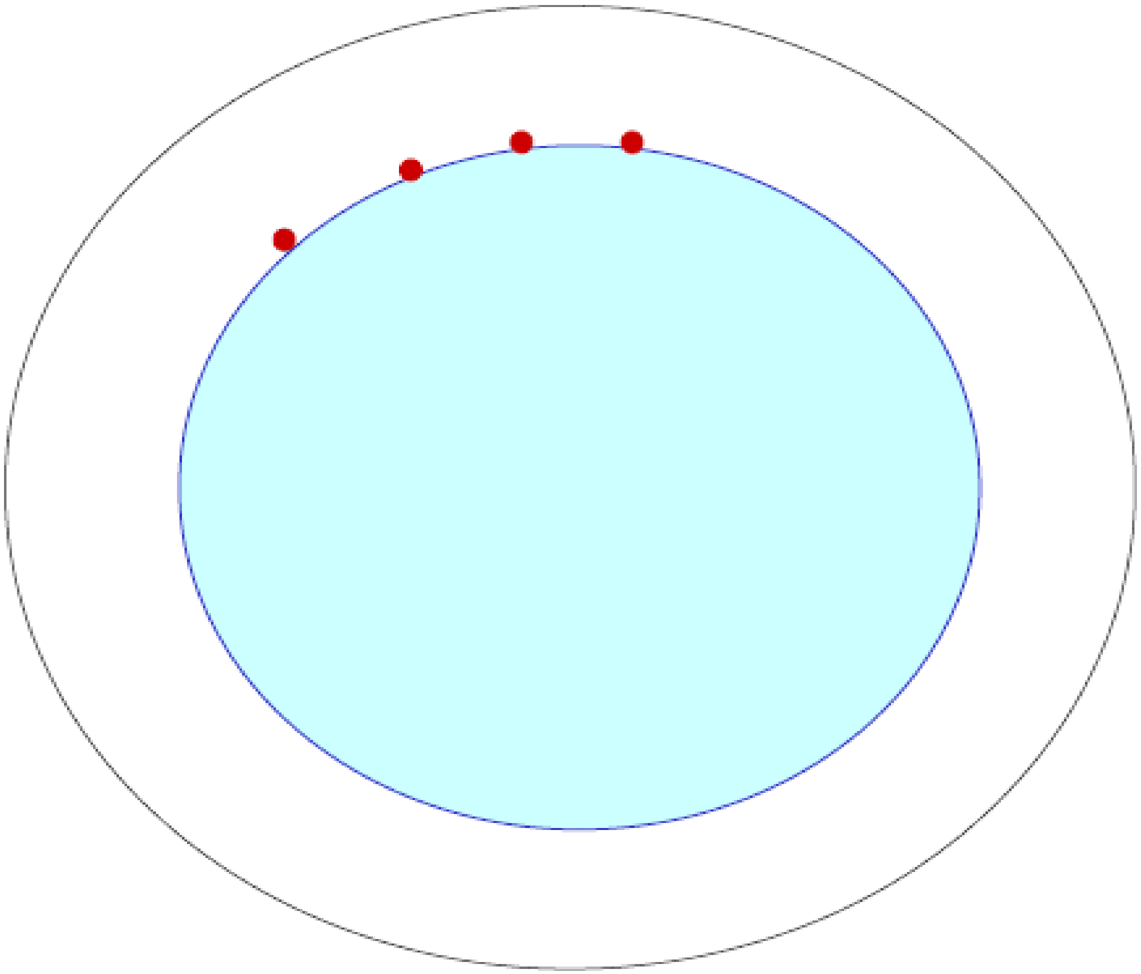
L'esperienza di Cavendish

- Due masse identiche pesanti collegate da una sbarra indeformabile;
- Il sistema appeso attraverso una fibra a cui è collegato uno specchietto;
- una sorgente luminosa che manda un raggio sullo specchietto che lo riflette su una scala graduata;
- una massa esterna che provoca l'attrazione e quindi la torsione del filo, e quindi al deviazione del raggio luminoso.



La gravitazione universale (6)

La Luna è in perpetua caduta sulla Terra.

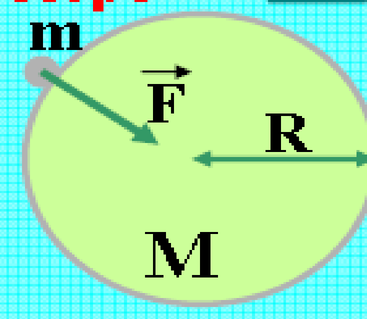


Velocità di fuga = 11.2 km/s ~ 40000 km/h

La gravitazione universale e la forza peso (1)

Es.

Quanto vale la forza gravitazionale tra la Terra e un corpo di massa m= 1 kg posto alla superficie della Terra?



Dati Terra: M = 5.98 $\cdot 10^{24}$ kg, R = 6.38 $\cdot 10^{6}$ m

$$F = G\frac{mM}{r^2}$$

$$= \frac{(6.67 \cdot 10^{-11}\ Nm^2/kg^2)\cdot(1\,kg)\cdot(5.98 \cdot 10^{-24}\ kg)}{(6.38 \cdot 10^{6}\ m)^2}$$

$$= 9.799\ N$$

Risultato: 9.8 N

$$F = G\frac{M}{r^2}m$$

$g = 9.8\ m/s^2$ nelle vicinanze della superficie della Terra

$\vec{F} = m\vec{g}$ **forza peso**

g è un'accelerazione!

$$r^2 = (R+h)^2 = R^2 + 2Rh + h^2$$

La gravitazione universale e la forza peso (2)

Consideriamo un corpo di massa m che si trova ad una altezza h sulla superficie della terra. Su di esso agisce la forza di attrazione gravitazionale F

$$F = \frac{GmM_{terra}}{r^2}$$

Possiamo scrivere

$$r^2 = \left(R_{terra} + h\right)^2 = R_{terra}^2 + 2R_{terra}h + h^2$$

$$h << R_{terra} \quad \Rightarrow \quad r^2 \cong R_{terra}^2$$

$$F \cong m\frac{GM_{terra}}{R_{terra}^2} = mg$$

L'accelerazione centripeta a_R ha la direzione ed il verso di Δv, cioè è diretta verso il centro della circonferenza.

Dal II° Principio della Dinamica possiamo quindi dedurre che affinchè un corpo si muova di moto circolare uniforme deve esistere una *forza centripeta* diretta verso il centro della circonferenza e il cui modulo vale

$$\left|\vec{F}\right| = m\frac{v^2}{R}$$

LE FORZE

forza gravitazionale:
ha la propria sorgente nella massa

forza vincolare:
ha la propria sorgente nelle interazioni fra gli atomi che compongono il vincolo

forza d'attrito:
ha la propria sorgente nelle interazioni fra due superfici

forza costante:
non cambia nel tempo e nello spazio modulo, direzione e verso

forza centripeta:
permette ai corpi di compiere moti circolari

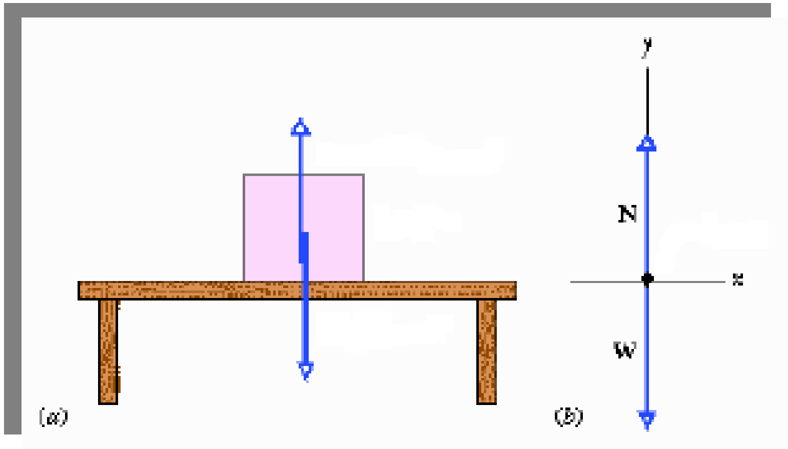
non esistono costanti o centripeti

FORZE DI REAZIONE VINCOLARE

Sono le forze esercitate dai vincoli cui è soggetto il corpo. L'azione del vincolo è rappresentata da una forza detta reazione vincolare.

Il corpo è in equilibrio sotto l'azione della forza peso **w** e della reazione vincolare **N** (normale alla superficie di contatto).

I° Principio della Dinamica



Le reazioni vincolari sono sempre ortogonali ai vincoli

FORZE DI ATTRITO (1)

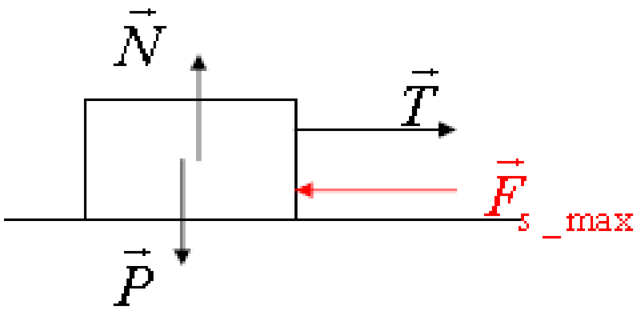
La forza di attrito si sviluppa quando due superfici ruvide slittano l'una sull'altra. È parallela alle superfici a contatto e si oppone al loro movimento relativo. Essa dipende dallo stato di rugosità delle superfici a contatto.

Dal punto di vista microscopico l'attrito è causato da tanti piccoli legami temporanei fra i punti di contatto fra le due superfici.

Per ridurre l'attrito: rotolamento o interposizione di liquidi

FORZE DI ATTRITO (3)

Alcune osservazioni empiriche:



1) F_{s_max} è indipendente dall'area di contatto

2) $F_{s\_max}=\mu_s N$ — μ_s coefficiente di attrito statico
0.5-1.0 metallo/metallo;
0.04 teflon/metallo; >1 adesione

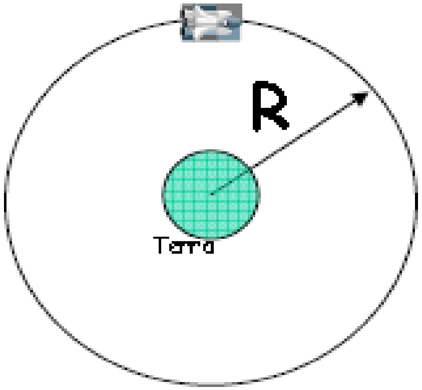
adimensionale

3) La forza per mantenere in moto un oggetto a velocità costante $F_d<F_{s\_max}$

$$F_d = \mu_d N \quad \Rightarrow \quad \mu_d < \mu_S$$

FORZA CENTRIPETA: esempi

Supponiamo di avere una astronave che ruota lungo una orbita stazionaria circolare di raggio R: quanto vale il modulo della sua velocità di rotazione?



L'unica forza agente sull'astronave è la forza di attrazione gravitazionale fra le terra e l'astronave stessa

$$F = G\frac{mM_T}{R^2}$$

Poiché l'astronave descrive un moto circolare uniforme la forza F deve essere centripeta e quindi

$$F = G\frac{mM_T}{R^2} = ma = m\frac{v^2}{R} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{G\frac{M_T}{R}}$$

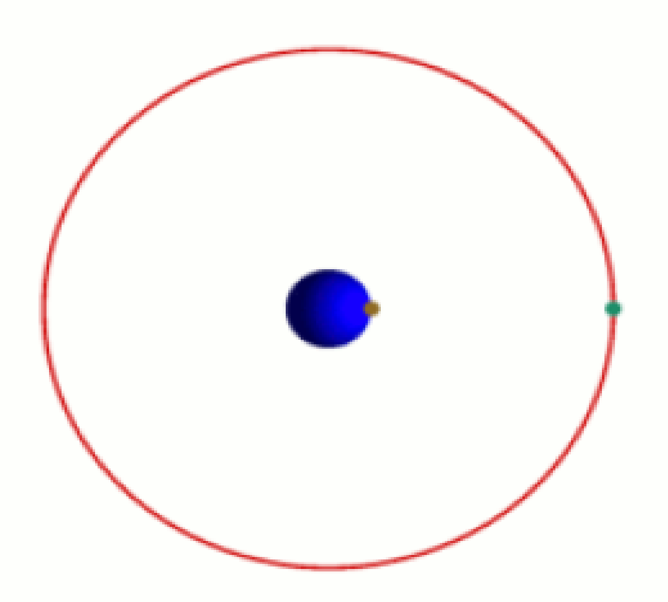
SATELLITI

Come si vede dalla formula

$$v = \sqrt{G\frac{M_T}{R}}$$

fissata la velocità di rotazione del satellite, è fissato il raggio dell'orbita e viceversa.

Per satelliti GEO (Geostationary Earth Orbit) avremo



$$v_{GEO} \approx 3 \ \text{Km/s} = 11000 \ \text{Km/h}$$

$$R_{GEO} \approx 42000 \ \text{Km}$$

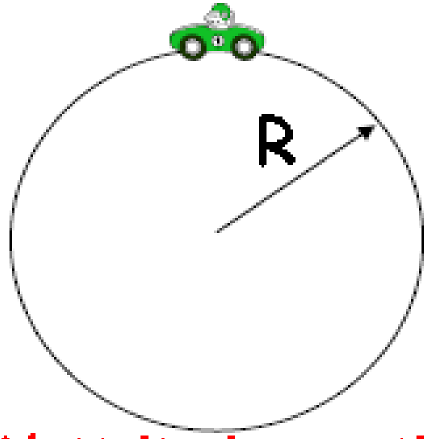
$$R_{GEO} = R_{Terra} + h$$

$$\Downarrow$$

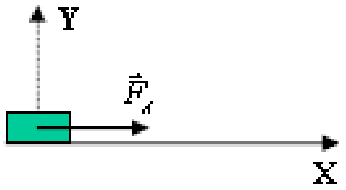
$$h \approx 36000 \ \text{Km}$$

FORZA CENTRIPETA: esempi

Supponiamo di avere un'auto che percorre una curva *piana* circolare di raggio R: quanto vale il modulo della velocità massima con la quale può percorrere la curva senza slittare?



L'unica forza capace di produrre una accelerazione centripeta è la forza d'attrito fra le ruote e la strada. Quindi la massima forza d'attrito producibile pone un limite alla velocità con cui l'auto può percorrere la curva senza slittare.



L'attrito in questione è quello statico (μ_S) perché, nel punto di contatto, il pneumatico è momentaneamente fermo, lungo il raggio della curva, rispetto alla strada. Se si supera v_{max} l'auto inizia a slittare e la forza d'attrito diminuisce ($\mu_d < \mu_S$) e quindi la macchina non si controlla.

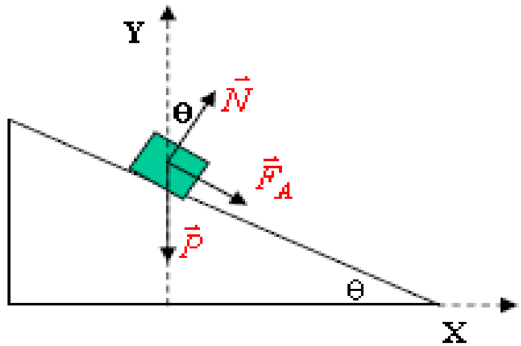
$$\vec{F}_A = \vec{F}_{centripeta} \qquad \vec{F}_A(\mu_S mg;0) \qquad \vec{F}_{centripeta}(F_{centripeta};0)$$

$$F_A = \mu_S mg = ma = m\frac{v^2}{R} \quad \Rightarrow \quad v_{max} = \sqrt{R\mu_S g}$$

Senza attrito non si può fare la curva

FORZA CENTRIPETA: esempi

Supponiamo di avere un'auto che percorre una curva *rialzata* circolare di raggio R: quanto vale il modulo della velocità massima con la quale può percorrere la curva senza slittare?



La somma delle forze agenti deve produrre una forza centripeta

$$\vec{F}_A + \vec{P} + \vec{N} = \vec{F}_{centripeta}$$

$$\vec{F}_A(\mu_S N\cos\theta; -\mu_S N\sin\theta) \qquad \vec{P}(0; -mg)$$

$$\vec{N}(N\sin\theta; N\cos\theta) \qquad \vec{F}_{centripeta}(F_{centripeta}; 0)$$

$$\begin{cases} \mu_S N\cos\theta + 0 + N\sin\theta = F_{centripeta} \\ -\mu_S N\sin\theta - mg + N\cos\theta = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad N = \frac{mg}{(\cos\theta - \mu_S\sin\theta)}$$

$$F_{centripeta} = mg\frac{\sin\theta + \mu_S\cos\theta}{\cos\theta - \mu_S\sin\theta}$$

$$\theta = 0^\circ \quad \Rightarrow \quad F_{centripeta} = \mu_S mg$$

Curva piana

$$\mu_S = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{centripeta} = mg\, tg\theta$$

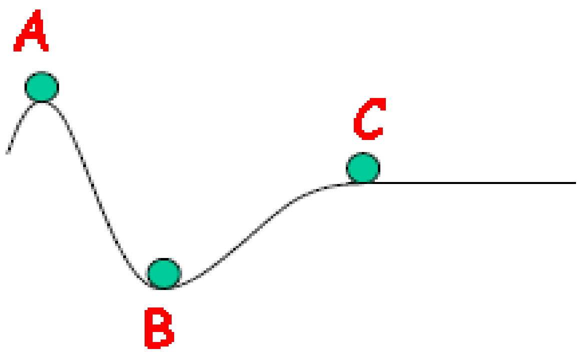
Senza attrito si può fare la curva

EQUILIBRIO DELLE FORZE

$$\sum \vec{F}_{ext} = 0$$

basta perchè

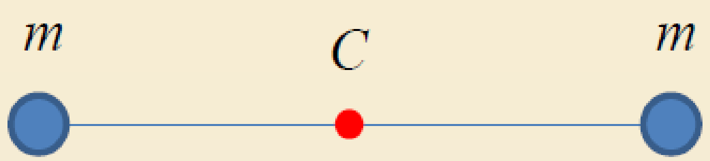
$$\sum \vec{F}_{\text{int}} = 0 \quad (\text{III}^\circ \text{ Principio})$$

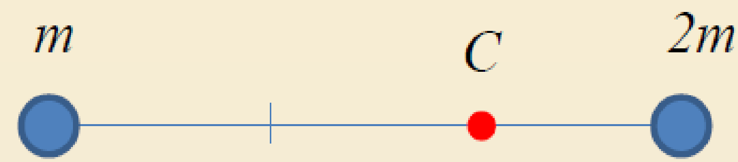


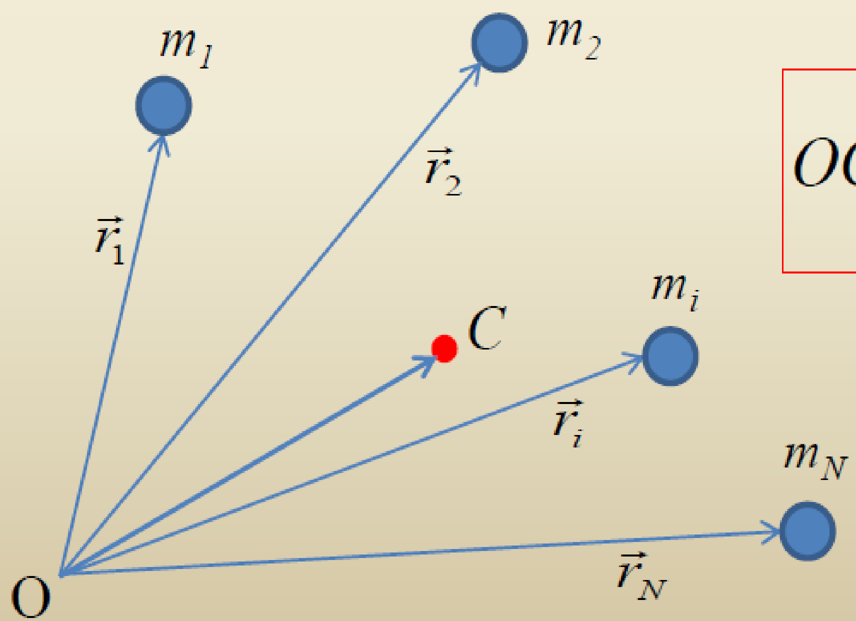
Si dice che un sistema fisico è in *equilibrio* quando la somma delle forze esterne agenti su di esso è zero.

A – equilibrio *instabile*, se si allontana il corpo dalla posizione di equilibrio, esso tende ad allontanarsi di più;
B – equilibrio *stabile*, se si allontana il corpo dalla posizione di equilibrio, esso tende a ritornare verso di essa;
C – equilibrio *indifferente*, se si sposta il corpo esso rimane dove lo mettiamo.

Centro di massa di un sistema materiale







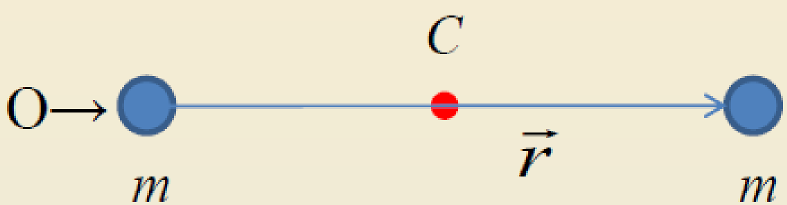
$$OC = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \cdots + m_N\vec{r}_N}{m_1 + m_2 + \cdots + m_N} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i$$

$$M\,\mathrm{OC} = \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i$$

Centro di massa di un sistema materiale

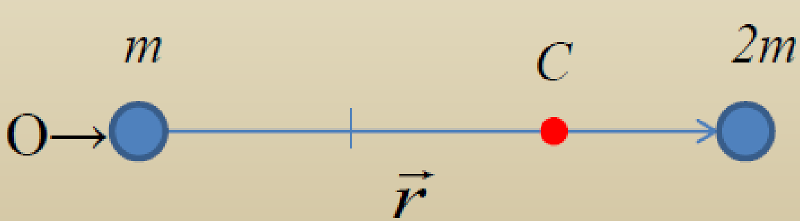
$$\boxed{OC = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \cdots + m_N\vec{r}_N}{m_1 + m_2 + \cdots + m_N}}$$

- 2 punti di uguale massa m



$$OC = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m \cdot 0 + m\vec{r}}{m + m} = \frac{\vec{r}}{2}$$

- due punti di massa m e $2m$



$$OC = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m \cdot 0 + 2m\vec{r}}{m + 2m} = \frac{2}{3}\vec{r}$$

Quantità di moto di un sistema materiale

Somma dei prodotti delle masse dei punti per le rispettive velocità

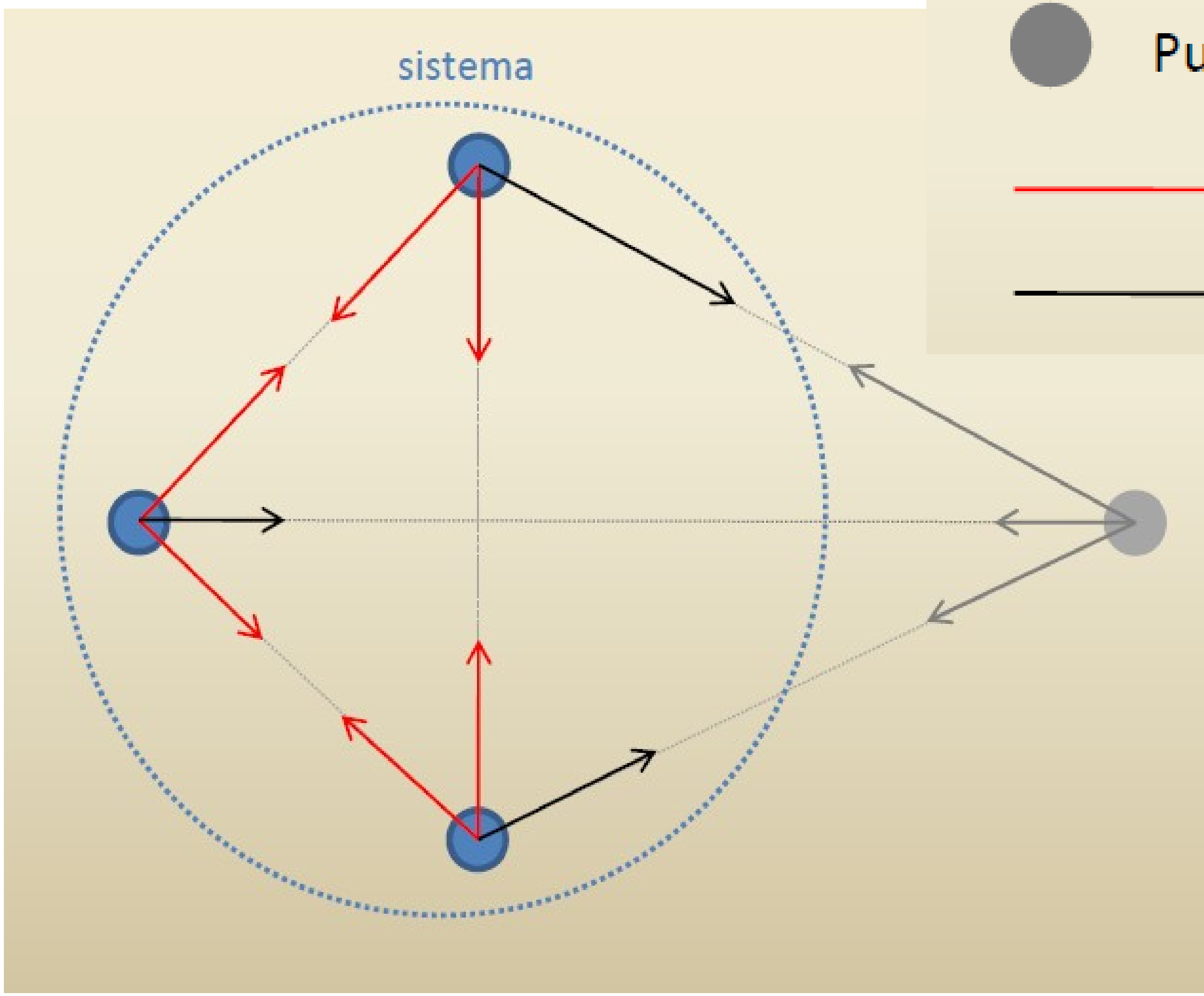
$$\boxed{\vec{Q} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i}$$

$$M\,OC = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \qquad M\vec{v}_C = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i \qquad M\,\vec{a}_C = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i$$

La quantità di moto di un qualsiasi sistema materiale si può sempre esprimere come il prodotto della massa del sistema per la velocità del centro di massa

$$\boxed{\vec{Q} = M\vec{v}_C} \longrightarrow \frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i = M\vec{a}_C$$

Forze interne e forze esterne al sistema



Punto appartenete al sistema

Punto non appartenete al sistema

forza interna

forza esterna

La somma di tutte le forze interne è nulla

$$\vec{R}^{(\mathrm{int})} = 0$$

Prima equazione cardinale della dinamica dei sistemi

$$\left.\begin{aligned} m_1\vec{a}_1 &= \vec{f}_1^{(\mathrm{int})} + \vec{f}_1^{(est)} \\ m_2\vec{a}_2 &= \vec{f}_2^{(\mathrm{int})} + \vec{f}_2^{(est)} \\ &\cdots \\ m_N\vec{a}_N &= \vec{f}_N^{(\mathrm{int})} + \vec{f}_N^{(est)} \end{aligned}\right\}$$

Seconda equazione della dinamica scritta per ciascun punto del sistema

$\vec{f}_i^{(\mathrm{int})}$ Somma delle forze interne agenti sull'i-esimo punto

$\vec{f}_i^{(est)}$ Somma delle forze esterne agenti sull'i-esimo punto

---

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{a}_i = \cancel{\vec{R}^{(\mathrm{int})}} + \vec{R}^{(est)}$$

La somma dei primi membri di queste equazioni deve essere uguale alla somma dei secondi membri

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{a}_i = M\vec{a}_C \\ \vec{R}^{(\mathrm{int})} = 0 \end{cases}$$

segue

$$\boxed{M\vec{a}_C = \vec{R}^{(est)}}$$

Principio di conservazione della quantità di moto

Utilizzando al relazione $\frac{d\vec{Q}}{dt} = M\vec{a}_C$ la prima eq. cardinale $M\vec{a}_C = \vec{R}^{(est)}$ si può scrive nella forma

$$\boxed{\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{R}^{(est)}}$$

Teorema della quantità di moto

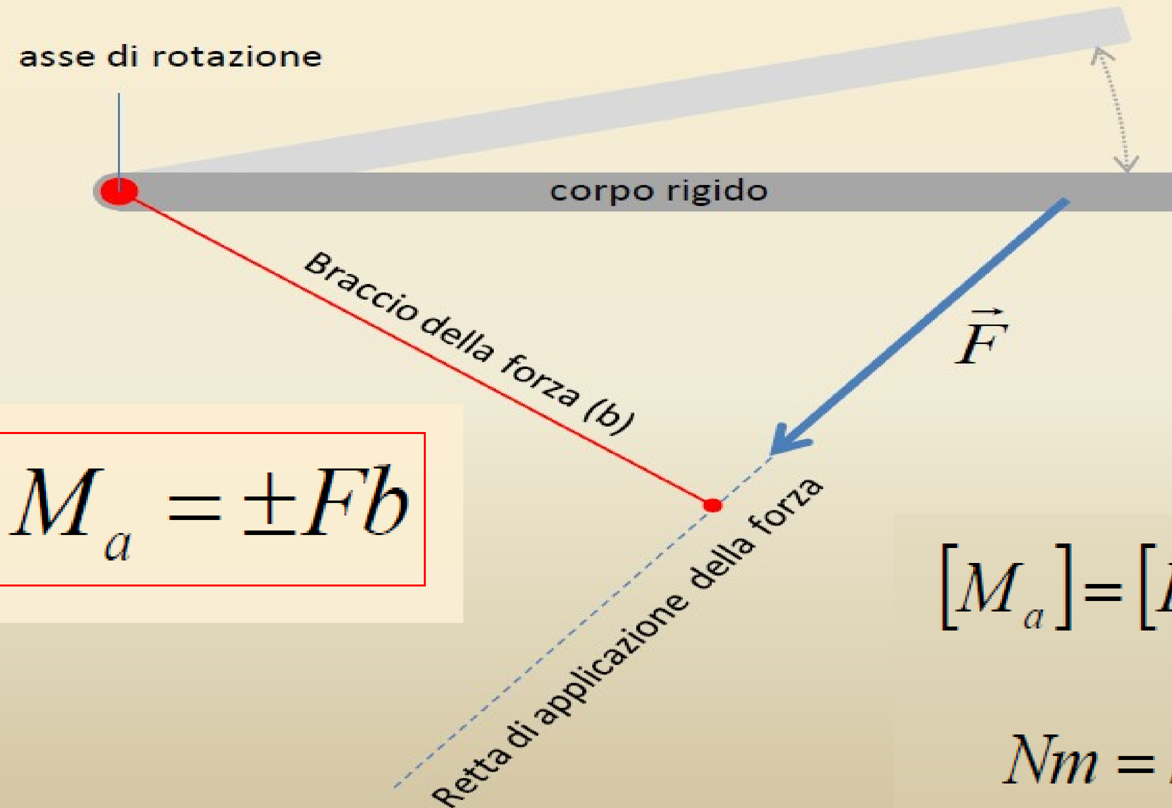
La derivata rispetto al tempo della quantità di moto di un sistema è uguale alla risultante delle forze esterne agenti sul sistema.

Principio di conservazione della quantità di moto

Se la risultante delle forze esterne agenti su un sistema è nulla, allora la quantità di moto del sistema si conserva costante nel tempo.

Se $\vec{R}^{(est)} = 0$ allora $\vec{Q} = \text{cost.} \Rightarrow \vec{v}_C = \cos t$

Momento di una forza



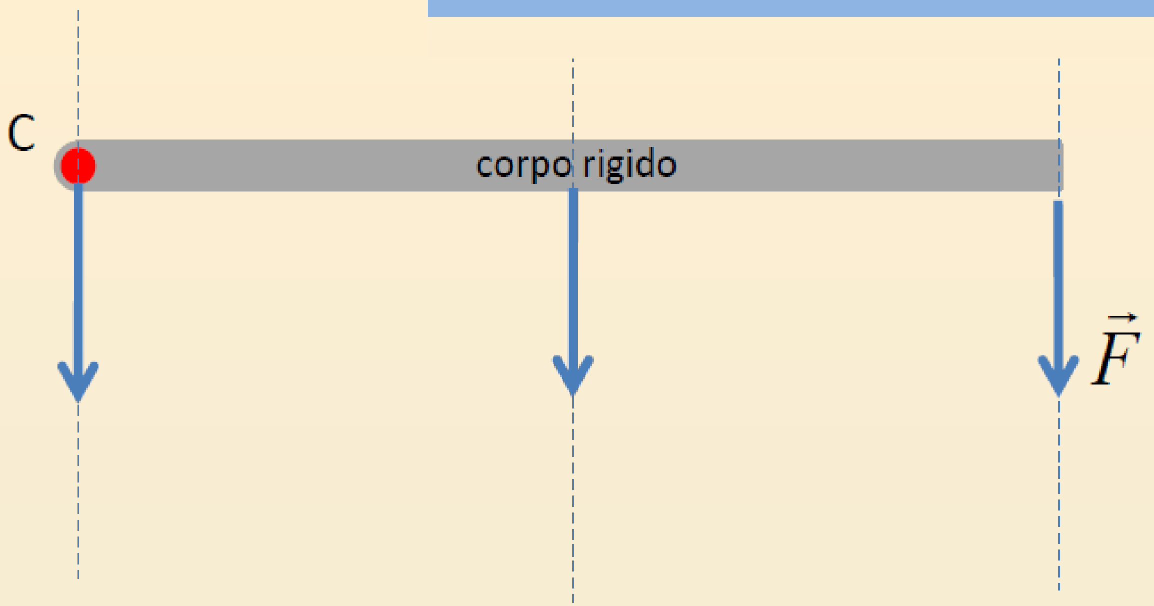
$$\boxed{M_a = \pm F b}$$

$$[M_a] = [FL] = [MLT^{-2}L] = [ML^2T^{-2}]$$

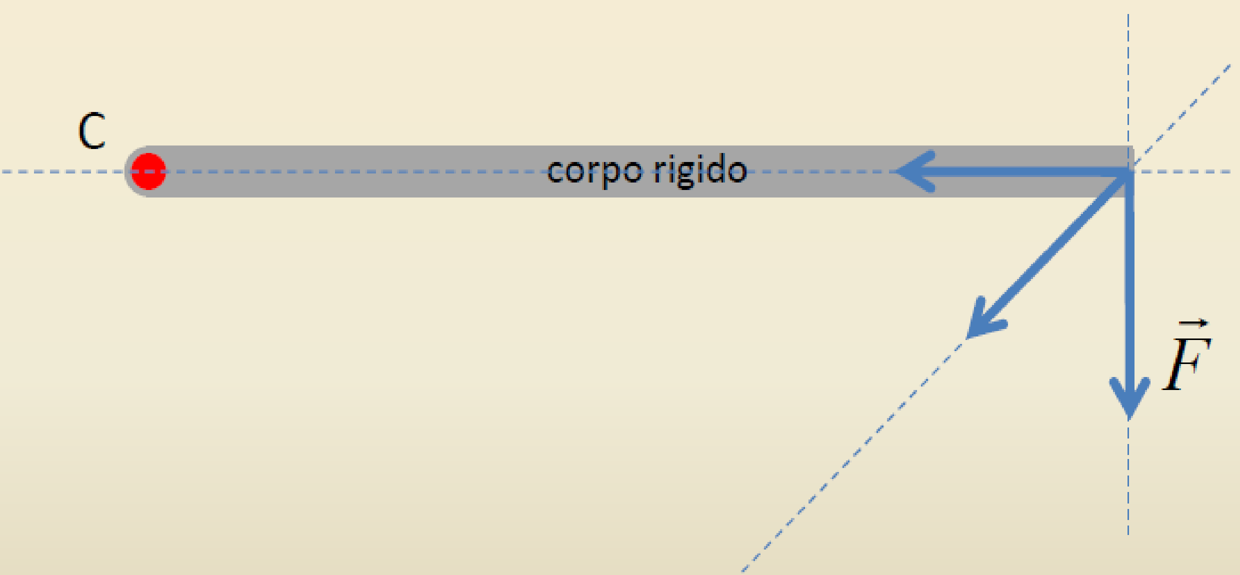
$$Nm = kg\, m^2\, s^{-2}$$

Dato un corpo rigido vincolato a ruotare attorno ad un asse fisso privo di attrito,
e una forza agente sul corpo e appartenente a un piano perpendicolare a tale asse,
si definisce momento della forza rispetto all'asse
il prodotto del modulo della forza per il suo braccio.
Il braccio è la minima distanza fra l'asse e retta di applicazione della forza.

Momento di una forza



Il braccio della forza (ed il momento) aumenta all'aumentare della distanza fra punto di applicazione della forza e centro di rotazione



Il braccio della forza (ed il momento) aumenta quanto più la forza è perpendicolare alla retta fra il punto di applicazione della forza e il centro di rotazione

Momento di inerzia

Definizione

Data un asse a, si definisce momento di inerzia di un sistema rispetto all'asse a, e si indica con il simbolo I_a, la somma dei prodotti delle masse dei punti del sistema per i quadrati delle rispettive distanze dall'asse.

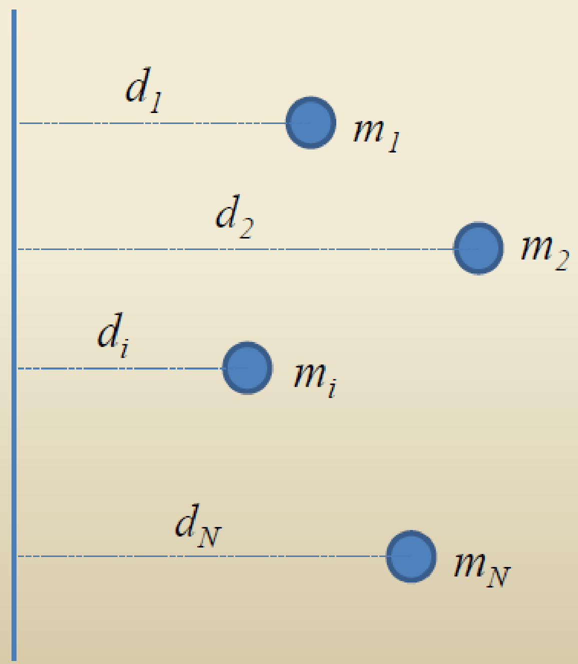
Sistema particellare

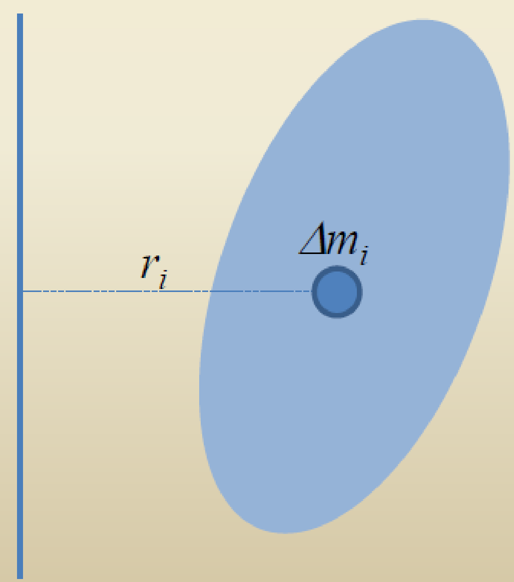
$$I_a = m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2 + \cdots + m_N d_N^2$$

Sistema continuo

$$I_a = \lim_{\Delta m_i \to 0} \left(\Delta m_1 r_1^2 + \Delta m_2 r_2^2 + \cdots + \Delta m_N r_N^2 \right)$$

$$\equiv \int_M r^2 dm$$





Seconda equazione cardinale della dinamica dei sistemi

Grandezze traslazionali				Grandezze rotazionali
massa	m	$\leftrightarrow$	I_a	Momento di inerzia
Accelerazione del centro di massa	$\vec{a}_C$	$\leftrightarrow$	α	Accelerazione angolare

Prima equazione cardinale della dinamica dei sistemi

$$M\vec{a}_C = \vec{R}^{(est)}$$

$\Rightarrow$

Seconda equazione cardinale della dinamica dei sistemi

$$I_a \alpha = M_a^{(est)}$$

Quantità di moto

$$\vec{Q} = M\vec{v}_C$$

$\Rightarrow$

Momento assiale della quantità di moto

$$L_a = I_a \omega$$

Teorema della quantità di moto

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{R}^{(est)}$$

$\Rightarrow$

Teorema del momento della quantità di moto

$$\frac{dL_a}{dt} = M_a^{(est)}$$

Principio di conservazione del momento angolare

$$\frac{dL_a}{dt} = M_a^{(est)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_a^{est} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dL_a}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad L_a = \text{cost.}}$$

Principio di conservazione del momento assiale della quantità di moto

Se il momento assiale delle forze esterne agenti su un sistema è nullo, allora il momento assiale della quantità di moto del sistema si conserva costante nel tempo.

Equazioni cardinali della statica dei sistemi

$$\begin{cases} M\vec{a}_C = \vec{R}^{(est)} \\ I_a \alpha = M_a^{(est)} \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{a}_C = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \vec{R}^{(est)} = 0 \\ M_a^{(est)} = 0 \end{cases}$$

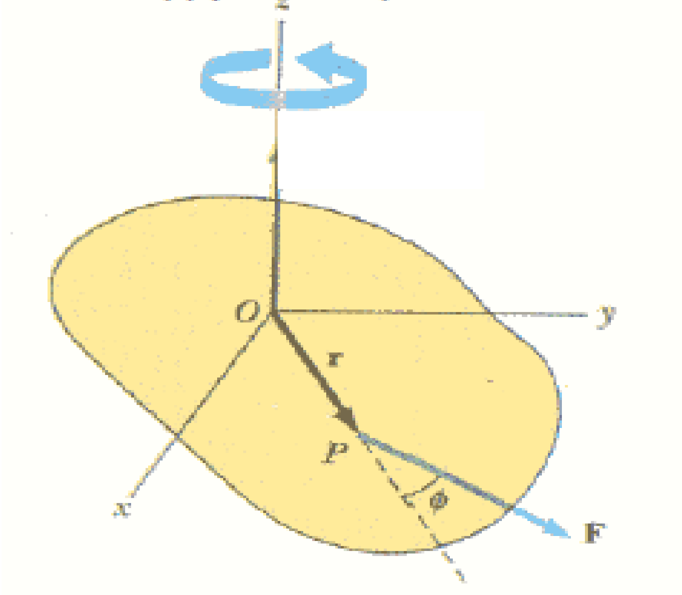
LA STATICA

Momento di una forza ($\vec{M}$): Il momento rispetto al punto arbitrario O di una forza $\vec{F}$ che agisce in un punto P di un corpo rigido (cioe' indeformabile) e' data dal prodotto vettoriale fra $\vec{r}$ (distanza di P da O) ed $\vec{F}$.

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Condizione di equilibrio:
nel caso di un sistema rigido devono essere nulle:

- la somma vettoriale di tutte le forze ad esso applicate (equilibrio traslazionale)
- la somma vettoriale dei momenti di tali forze (equilibrio rotazionale)



LE LEVE

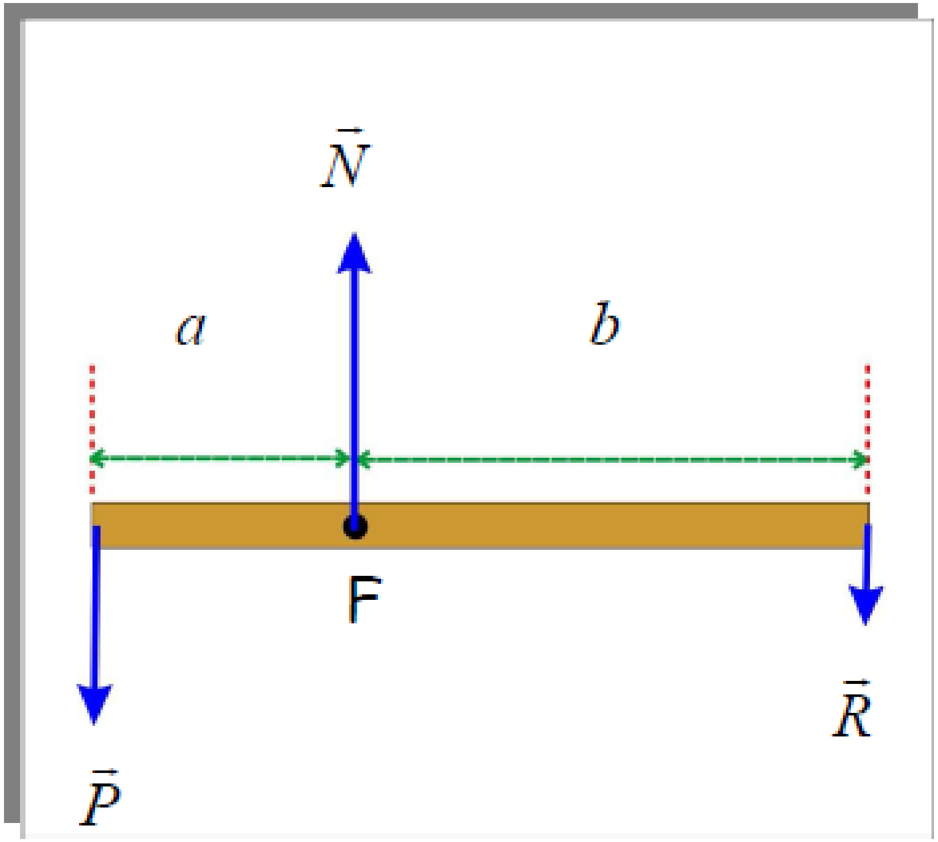
Leva: asta rigida che puo' ruotare attorno ad un asse ad essa perpendicolare detto fulcro sottoposta a 2 forze di cui una e' detta potenza e l'altra resistenza. La condizione di equilibrio e':

1) $$\vec{P} + \vec{R} + \vec{N} = 0$$

2) $$Pa = Rb$$

Guadagno :

$$G = \frac{R}{P} = \frac{a}{b}$$

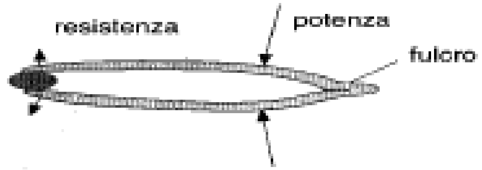


TIPI DI LEVE

Leva di 1° genere: Fulcro intermedio fra potenza e resistenza.
Puo' avere guadagno maggiore, minore o uguale ad 1.
Esempio: pinza

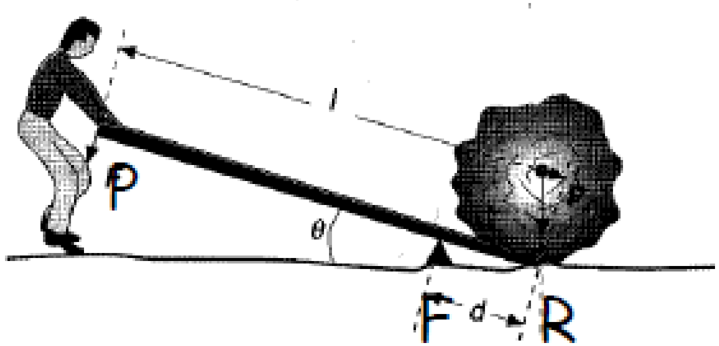
Leva di 2° genere: Resistenza intermedia fra fulcro e potenza.
Ha sempre guadagno maggiore di 1 (vantaggiosa).
Esempio: schiaccianoci

Leva di 3° genere: Potenza intermedia fra fulcro e resistenza.
Ha sempre guadagno minore di 1 (svantaggiosa).
Esempio: pinzette



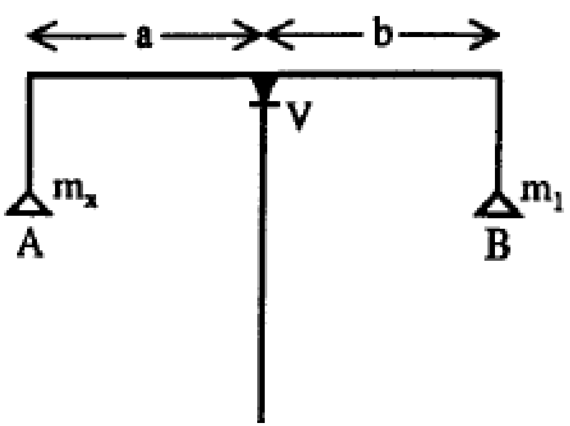
ESEMPI DI LEVE DI 1° GENERE

Asse per sollevare oggetti pesanti

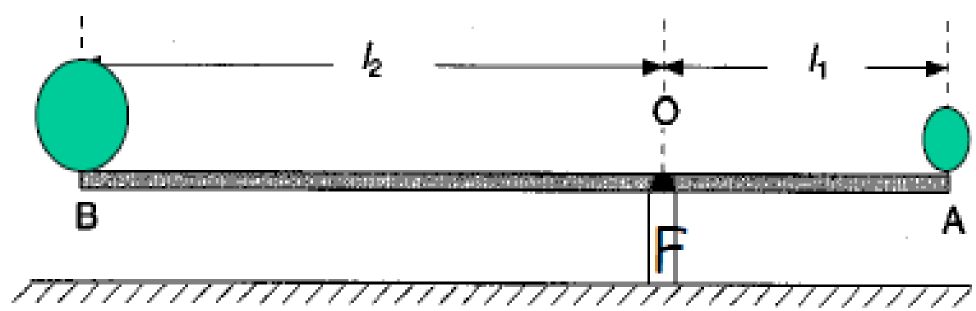


Barca a remi

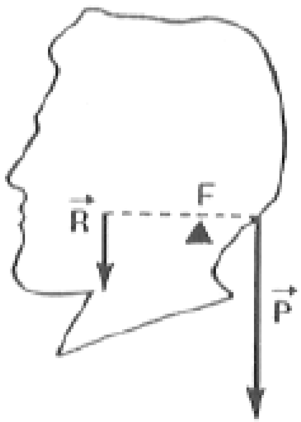
Bilancia



Altalena a bilico



LEVE DEL CORPO UMANO



Articolazione di appoggio della testa:

Leva di 1° genere, in questo caso svantaggiosa.

Fulcro = articolazione

Resistenza = peso (applicato nel baricentro)

Potenza = muscoli splenici

Massa della testa = 8 kg. Forza peso della testa: circa 80 N

Distanza fra il fulcro ed i muscoli splenici: 2 cm

Distanza fra il fulcro e il baricentro della testa: 8 cm

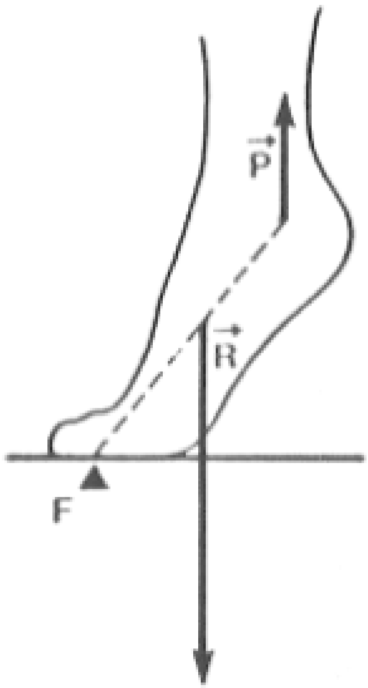
E' una leva svantaggiosa

La forza che deve essere esercitata dai muscoli splenici per tenere la testa in posizione eretta si ricava da:

$F_{splenici} \times 2cm = 80\ N \times 8\ cm$

$F_{splenici} = 320\ N$, corrispondente a una massa di circa 32 kg

LEVE DEL CORPO UMANO



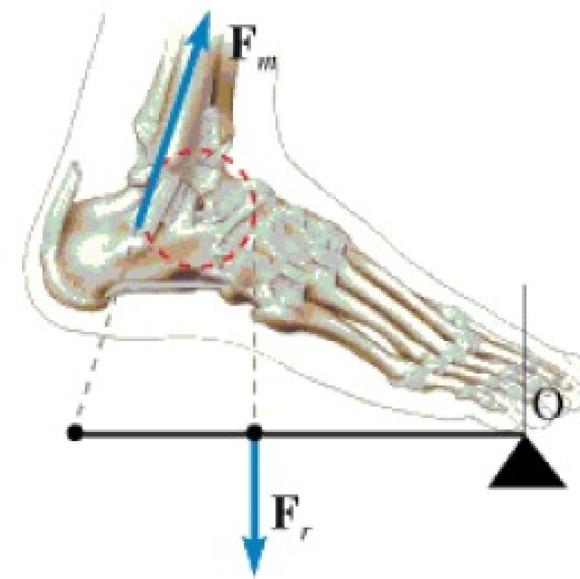
Articolazione del piede in elevazione sulle punte:

Leva di 2° genere, quindi vantaggiosa.

Fulcro = dita.

Resistenza = peso che grava sulla caviglia.

Potenza: muscoli del polpaccio, che esercitano una trazione sul tendine d'Achille.



LEVE DEL CORPO UMANO

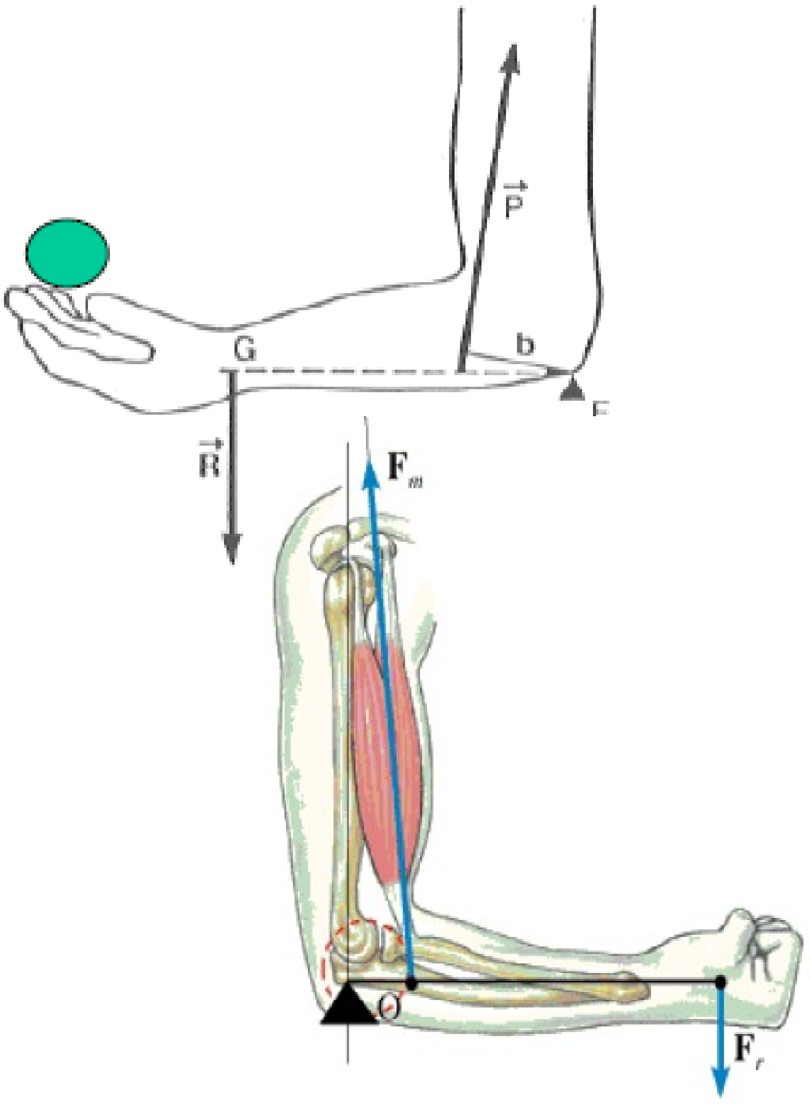
Articolazione del gomito:

Leva di 3° genere, quindi svantaggiosa.

Fulcro = articolazione.

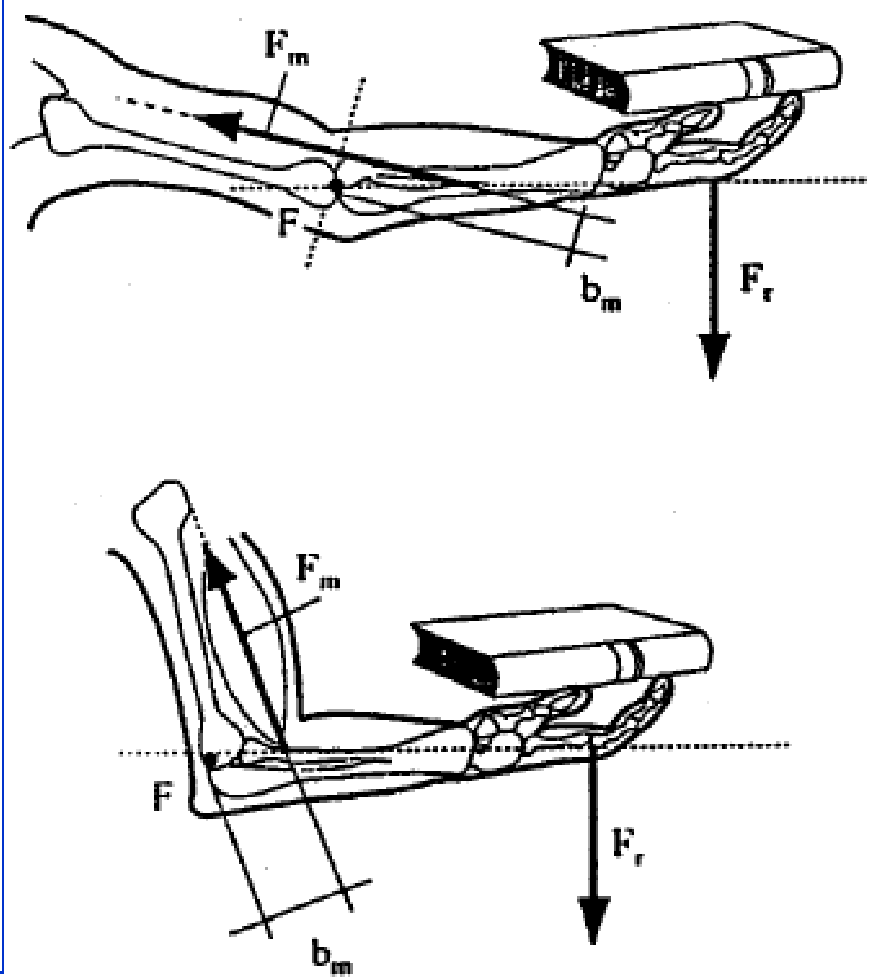
Resistenza = forza peso dell'avambraccio e dell'eventuale massa sostenuta dalla mano.

Potenza: Forza esercitata dal bicipite brachiale



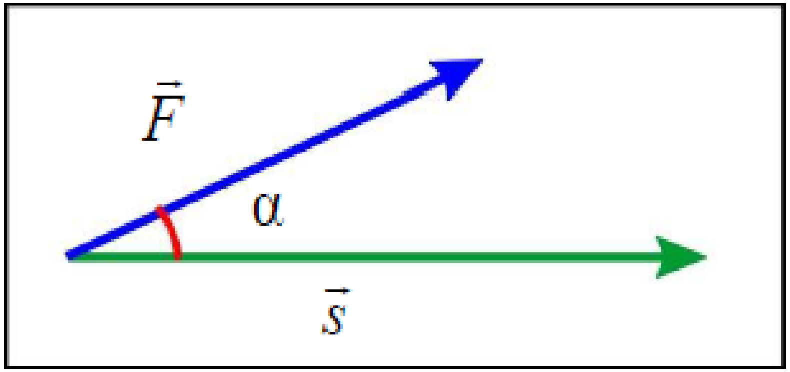
LEVE DEL CORPO UMANO

L'articolazione del gomito col braccio disteso e' piu' svantaggiosa dell'articolazione del gomito col braccio raccolto vicino al tronco poiche' in questo caso si puo' aumentare il braccio della potenza (b_m) e diminuire quello della resistenza.



LAVORO

Se un corpo agisce una forza ***F***, il lavoro compiuto dalla forza per uno spostamento ***s*** è



$$L = \int F \cos\alpha \, ds = \int \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

se la forza è costante

$$L = F \cdot s \cdot \cos\alpha = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

IL LAVORO E' UNO SCALARE

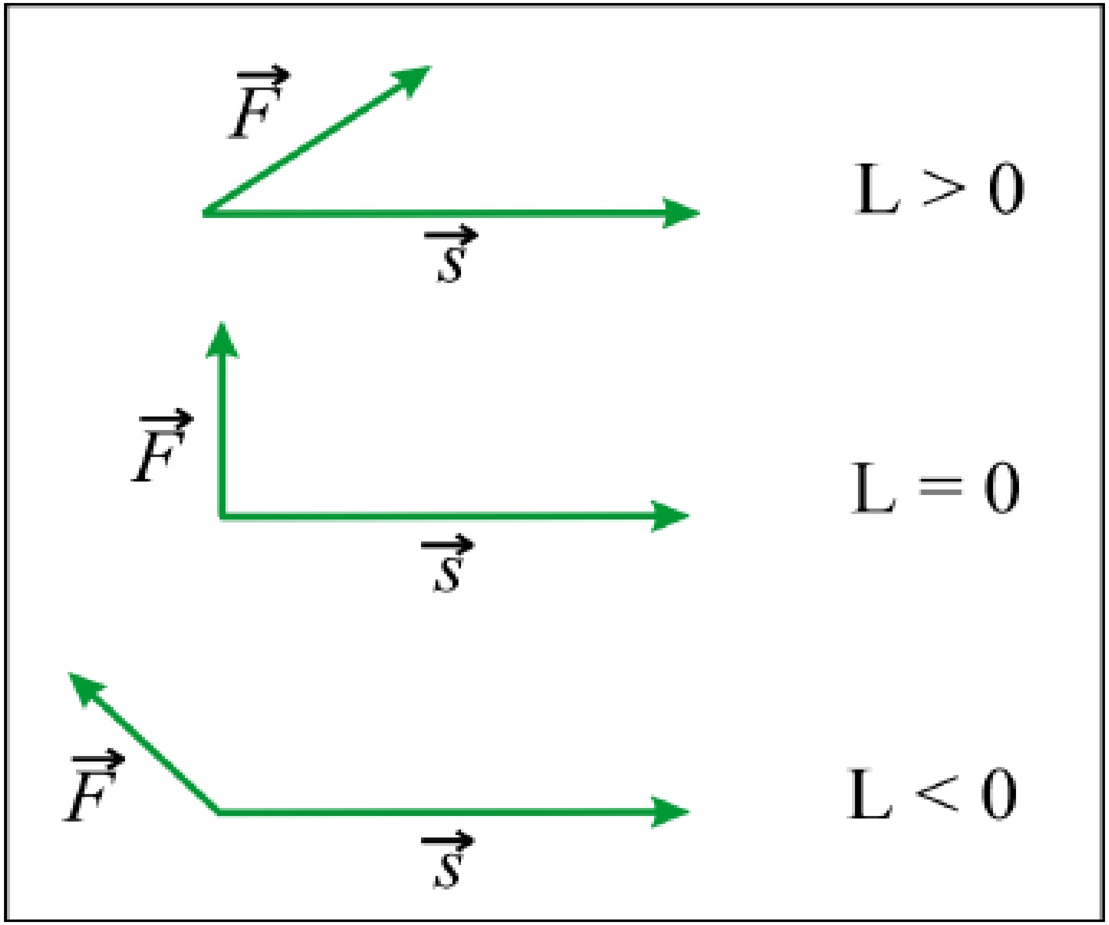
LAVORO

Il lavoro può essere

positivo

nullo

negativo



LAVORO

L'unità di misura del lavoro nel S.I. si chiama joule: lavoro compiuto dalla forza di 1 N che si sposta di 1 m parallelamente alla direzione della forza.

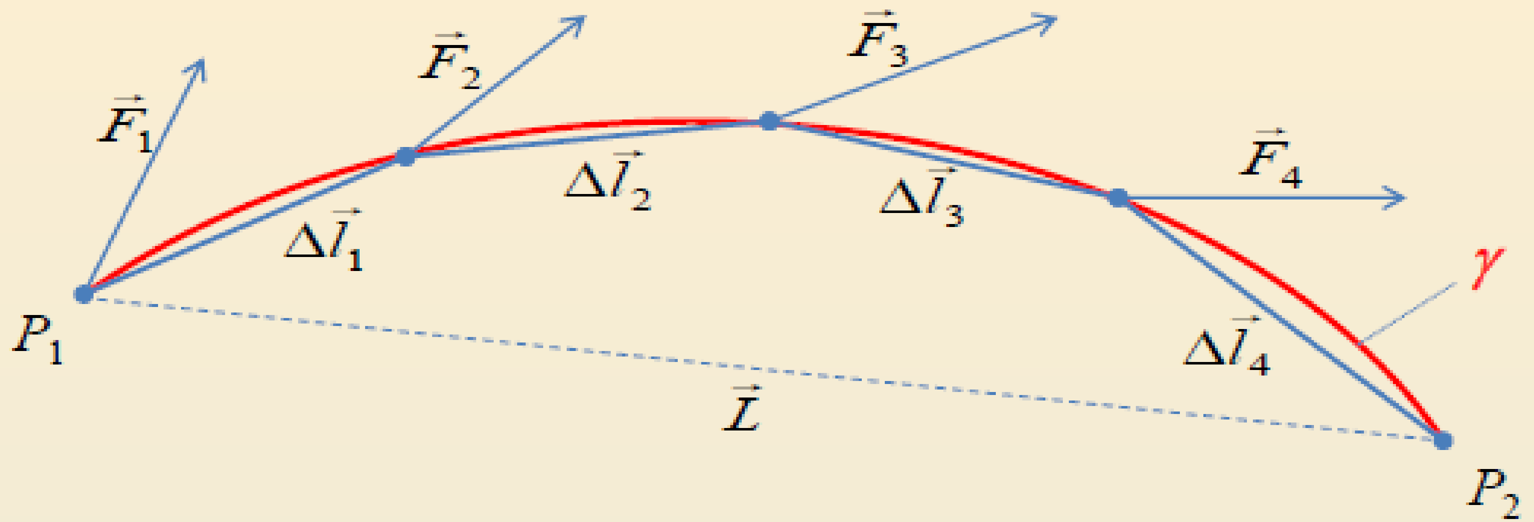
$$J = N \cdot m = kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$$

Nel sistema C.G.S. l'unità di lavoro si chiama erg.

$$erg = dyne \cdot cm = g \cdot cm^2 \cdot s^{-2}$$

$$joule = N \cdot m = 10^5 dyne \cdot 10^2 cm = 10^7\ erg$$

LAVORO



$$L_{P_1P_2,\gamma} = \lim_{\Delta l_i \to 0}\left(\vec{F}_1\cdot\Delta\vec{l}_1 + \vec{F}_2\cdot\Delta\vec{l}_2 + \vec{F}_3\cdot\Delta\vec{l}_3 + \cdots\right) = \int_{P_1,\gamma}^{P_2}\vec{F}\cdot d\vec{l}$$

Se la forza F agente su P è costante

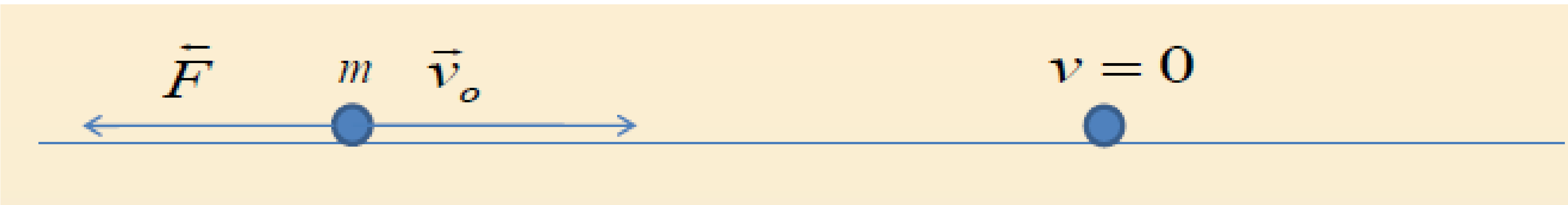
$$L = \int_{P_1,\gamma}^{P_2}\vec{F}\cdot d\vec{l} = \vec{F}\cdot\int_{P_1,\gamma}^{P_2}d\vec{l} = \vec{F}\cdot P_1P_2 = \vec{F}\cdot\vec{L}$$

Se la forza F agente su P è costante e parallela a L

$$L = \pm FL$$

ENERGIA CINETICA (1)

Applichiamo una forza per fermare un corpo in moto con velocità $\bar{v}_0$



$$a = F / m \qquad d_{arr} = \frac{v_0^2}{2a} \Leftarrow L = -d_{arr}F = -\frac{v_0^2}{2a}F = -\frac{1}{2}mv_0^2$$

Il lavoro compiuto dal punto è quindi:

$$L = \frac{1}{2}mv_0^2$$

La capacità di compiere lavoro legata a massa e velocità viene chiamata Energia Cinetica (E_c)

$$E_C = \frac{1}{2}mv^2$$

TEOREMA DELLE FORZE VIVE

Enunciato

La variazione di energia cinetica di un sistema materiale in un qualsiasi intervallo di tempo è pari al lavoro compiuto dalle forze agenti sul punto nello stesso intervallo di tempo.

$$\boxed{E_c(t_2) - E_c(t_1) = L_{t_1 t_2}}$$

In termini differenziali

$$\boxed{dE_C = dL}$$

ENERGIA CINETICA (2)

$$\boxed{L = \Delta T} = T_2 - T_1 = \frac{1}{2} m\, v_2^2 - \frac{1}{2} m\, v_1^2$$

verifica : moto rettilineo uniformemente accelerato

($\vec{a}$ = costante)

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} \qquad \Delta s = v_{media}\, \Delta t = \frac{(v_1 + v_2)}{2} \Delta t$$

$$L = \vec{F} \cdot \vec{\Delta} s = m\, a\, \Delta s = m \frac{(v_2 - v_1)(v_1 + v_2)\Delta t}{2\, \Delta t} = \frac{1}{2} m (v_2{}^2 - v_1{}^2) =$$

$$= \frac{1}{2}\, m\, v_2{}^2 - \frac{1}{2}\, m\, v_1{}^2 = T_2 - T_1 = \Delta T$$

Problema

Sempre una forza cambia la velocità del corpo alla quale è applicata?

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

sì

Sempre una forza cambia l'energia del corpo alla quale è applicata?

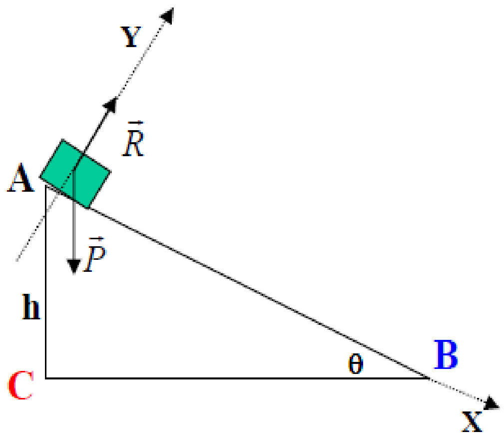
$$L = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

no

solo se L è

diverso da zero

LAVORO: esempi



Vogliamo calcolare i moduli delle velocità, nel punto B e nel punto C, che avrà un corpo partito da fermo dal punto A, su di un piano inclinato alto h.

$$\vec{P} + \vec{R} = \vec{F}_T$$

$$\vec{P}(mg\sin\theta; -mg\cos\theta) \quad \vec{R}(0;R) \quad \vec{F}_T(F_T;0)$$

$$\begin{cases} mg\sin\theta + 0 = F_T \\ R - mg\cos\theta = 0 \end{cases}$$

$$\vec{P} = \vec{F}_T$$

$$L = \int_A^C \vec{F}_T \cdot d\vec{s} = F_T \cdot AC \cdot \cos 0^o = mgh$$

$$L = \frac{1}{2}mv_C^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}mv_C^2$$

$$\frac{1}{2}mv_C^2 = mgh \quad \Rightarrow \quad v_C = \sqrt{2gh}$$

$$L = \int_A^B \vec{F}_T \cdot d\vec{s} = F_T \cdot AB \cdot \cos 0^o = mg\sin\theta \frac{h}{\sin\theta}$$

$$L = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}mv_B^2$$

$$\frac{1}{2}mv_B^2 = mgh \quad \Rightarrow \quad v_B = \sqrt{2gh}$$

LE REAZIONI VINCOLARI NON FANNO LAVORO

POTENZA

La potenza è il rapporto fra il lavoro compiuto ed il tempo impiegato.

$$P = \frac{L}{t} = \frac{Fs\cos\alpha}{t} = Fv\cos\alpha = \vec{F}\cdot\vec{v}$$

POTENZA

L'unità di misura della potenza nel S.I. si chiama watt.

$$watt = W = \frac{joule}{s} = J \cdot s^{-1}$$

Il **kilowattora (kWh)** è una unità pratica di energia (e non di potenza !), pari all'energia erogata da una macchina della potenza di 1 kW in 1 ora.

$$kWh = 1000 \cdot 1 Js^{-1} \cdot 3600\,\mathrm{s} = 3.6\,\mathrm{MJ}$$

FORZE CONSERVATIVE

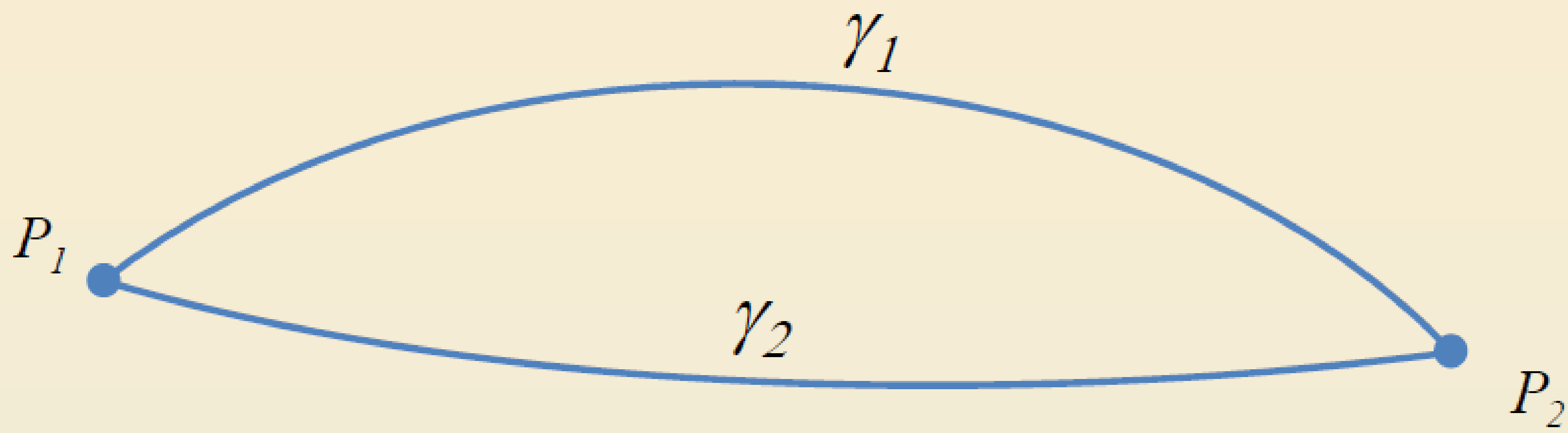
Forza conservativa: il lavoro compiuto da una forza conservativa non dipende dal percorso seguito, ma dipende dal punto di partenza e punto di arrivo.

$$L = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = U(A,B)$$

La funzione U ha le dimensioni di un lavoro, cioè di una energia ed è detta

ENERGIA POTENZIALE

FORZE CONSERVATIVE



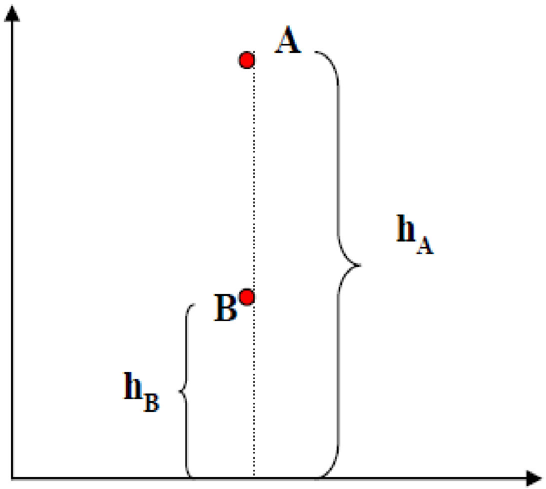
$$L_{P_1P_2} = \int_{P_1,\gamma}^{P_2} \vec{F}\cdot d\vec{l} = E_P(P_1) - E_P(P_2)$$

$$\boxed{dL = -dE_p}$$

$$\int_{P_1}^{P_2} dL = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F}\cdot d\vec{l} = L_{P_1P_2}$$

$$\int_{P_1}^{p_2} dE_P = E_P(P_2) - E_P(P_1)$$

FORZE CONSERVATIVE: esempio



Un corpo cade sotto l'azione del suo peso dall'altezza h_A e raggiunge l'altezza h_B: quant'è il lavoro della forza peso?

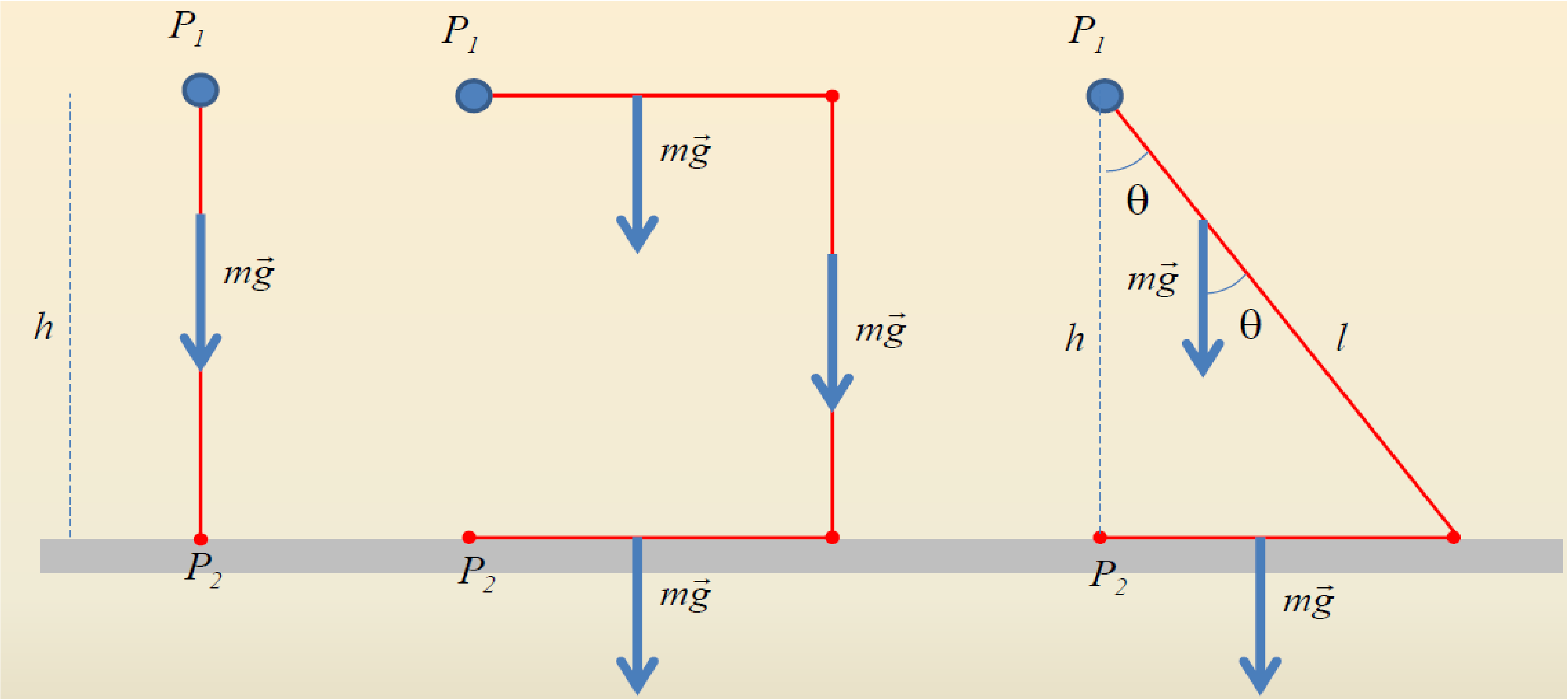
$$L = \int_{h_A}^{h_B} \vec{F} \cdot d\vec{s} = -mg(h_B - h_A) = -(mgh_B - mgh_A)$$

$$U = mgh$$

Energia potenziale della forza peso

$$L = -\left(U_{finale} - U_{iniziale}\right) = -\Delta U$$

FORZE CONSERVATIVE: esempio

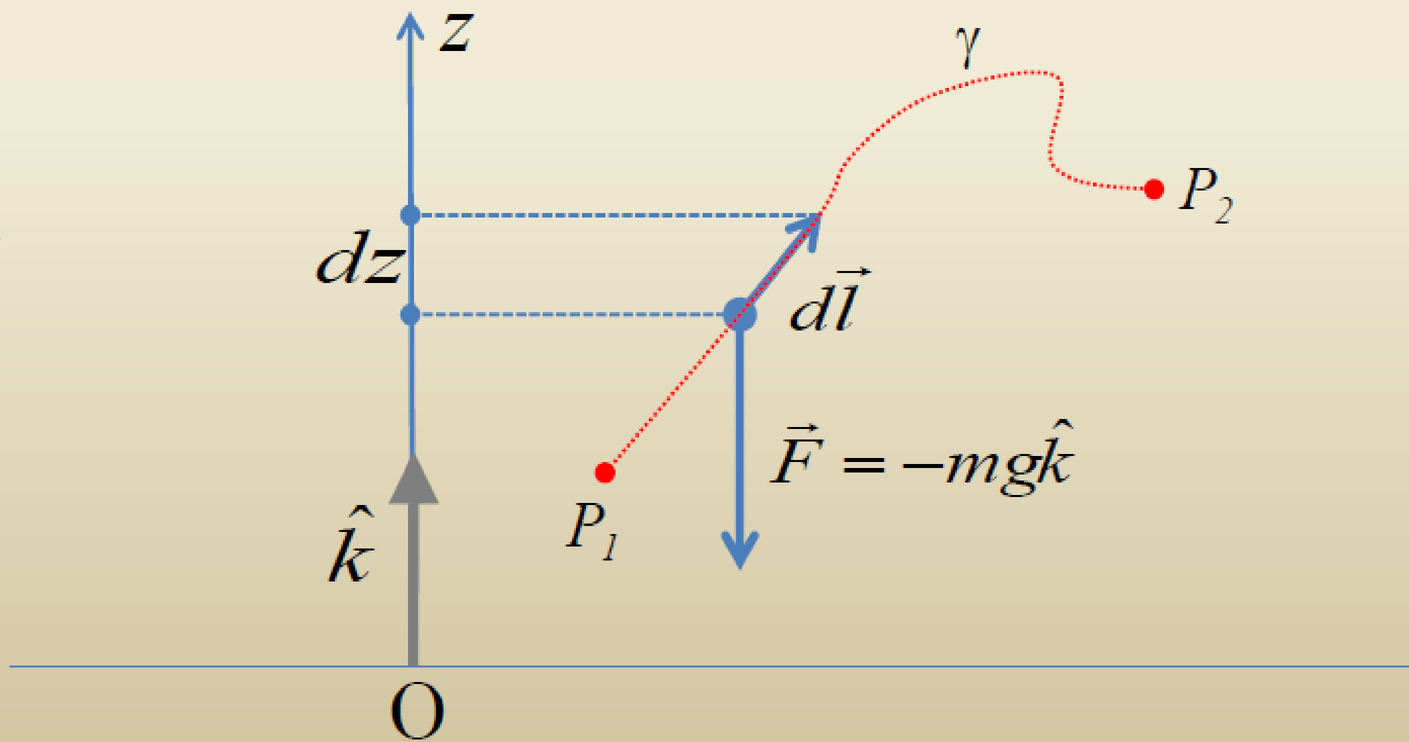


$$L_{P_1P_2} = mgh \qquad L_{P_1P_2} = 0 + mgh + 0 = mgh \qquad L_{P_1P_2} = 0 + mgl\cos\theta = mgh$$

$\boxed{E_p = mgh}$ risulta infatti $L_{P_1P_2} = E_p(P_1) - E_p(P_2) = mgh - 0 = mgh$

FORZE CONSERVATIVE: esempio

$$d\vec{l} \cdot \hat{k} = dz$$



$$E_P(x,y,z) = -\int_{P_0}^{P} \vec{F} \cdot d\vec{l} + E_P(x_0,y_0,z_0) = -(mgz_0 - mgz) + E_p(\mathrm{O}) = mgz$$

$$P_0 \equiv \mathrm{O}; \quad x_0 = y_0 = z_0 = 0 \quad E_P(P_0) = E_P(\mathrm{O}) = 0$$

FORZE CONSERVATIVE: esempio

Un corpo di massa m_1 si muove, dal punto A al punto B, sotto l'azione dell'attrazione gravitazionale di un corpo di massa m_2: quant'è il lavoro della forza gravitazionale?

$$L = \int_{r_A}^{r_B} G\frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}\cdot d\vec{r} = -G\frac{m_1 m_2}{r_B} + G\frac{m_1 m_2}{r_A} = -\left(G\frac{m_1 m_2}{r_B} - G\frac{m_1 m_2}{r_A}\right)$$

$$L = -\left(U_{finale} - U_{iniziale}\right) = -\Delta U$$

$$U = -G\frac{m_1 m_2}{r}$$

Campo di forze attrattivo

⇕

Energia potenziale negativa

↑

Energia potenziale della forza gravitazionale

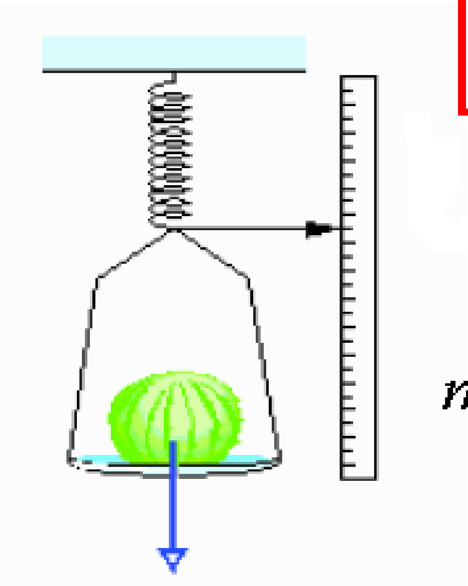
FORZE ELASTICHE: LE MOLLE

Consideriamo una molla ideale di costante elastica k.
Queste molle esercitano forze elastiche del tipo

$$\vec{F} = -k\vec{x} \qquad \left\{ [k] = Nm^{-1} \right\}$$

dove x è l'elongazione della molla ed il segno meno indica che la forza si oppone allo spostamento.

dinamometro



Poiché il dinamometro è in equilibrio deve valere, per il I° Principio della Dinamica

$$\vec{P} + \vec{F} = 0$$

$$mg - kx = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{mg}{k}$$

Misura diretta della forza

FORZE CONSERVATIVE: esempio

Una molla ideale di costante elastica k, sposta un corpo dal punto A al punto B: quant'è il lavoro della forza elastica ?

$$L = \int_{x_A}^{x_B} -kx\,dx = -\frac{1}{2}kx_B^2 + \frac{1}{2}kx_A^2 = -\left(\frac{1}{2}kx_B^2 - \frac{1}{2}kx_A^2\right)$$

$$L = -\left(U_{finale} - U_{iniziale}\right) = -\Delta U$$

Energia potenziale della forza elastica $\Rightarrow$ $U = \frac{1}{2}kx^2$

CONSERVAZIONE DELL'**ENERGIA TOTALE MECCANICA**

Per una forza conservativa che compie un lavoro per andare da A a B, valgono contemporaneamente

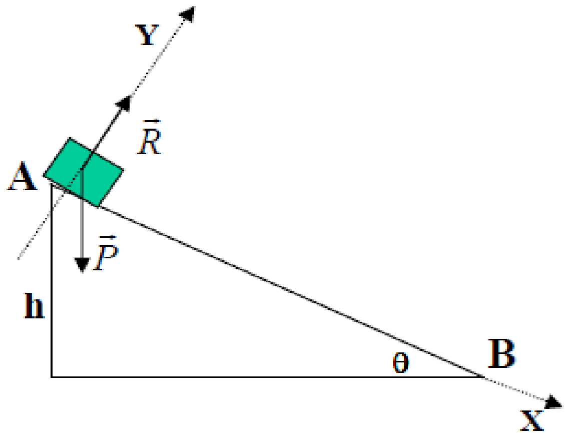
$$L = \Delta T = (T_B - T_A) \quad \text{e} \quad L = -\Delta U = -(U_B - U_A)$$

$$(T_B - T_A) = -(U_B - U_A)$$

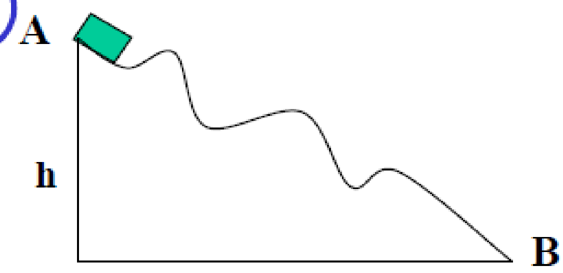
$$T_A + U_A = T_B + U_B$$

ESEMPI (1)

1



2

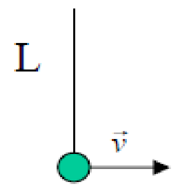


Vogliamo calcolare i moduli delle velocità, nel punto B, che avrà un corpo partito da fermo dal punto A, nel primo e nel secondo caso.
In entrambi casi le forze che agiscono sul corpo sono la forza peso e la reazione vincolare.
Quest'ultima non compie lavoro, essendo sempre ortogonale al vincolo sul quale il corpo scorre, quindi non può cambiare l'energia del corpo, ma solamente la sua traettoria.
Dal punto di vista energetico agisce solo la forza peso, che è conservativa, quindi

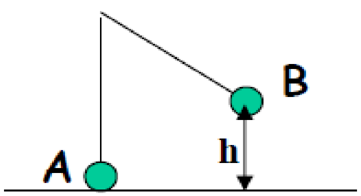
$$T_A + U_A = T_B + U_B \quad \Rightarrow \quad 0 + mgh = \frac{1}{2} m v_B^2 + 0 \quad \Rightarrow \quad v_B = \sqrt{2gh}$$

ESEMPI (2)

$L = 1\,\mathrm{m}$ $\quad |\vec{v}| = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$



Consideriamo il pendolo di figura composto da un filo inestensibile lungo L ed una massa m. Forniamo alla massa una velocità v e ci domandiamo quale è l'altezza massima alla quale il pendolo risale.



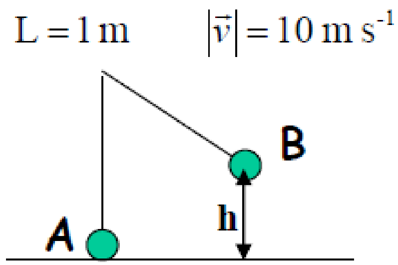
Le forze che agiscono sul corpo sono la forza peso e la reazione vincolare del filo. Quest'ultima non compie lavoro e quindi non può cambiare l'energia del corpo, ma solamente la sua traettoria.Dal punto di vista energetico agisce solo la forza peso, che è conservativa.

$$T_A + U_A = T_B + U_B \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv^2 + 0 = 0 + mgh \quad \Rightarrow \quad h = \frac{v^2}{2g}$$

$$h \approx \frac{100\, m^2 s^{-2}}{20\, ms^{-2}} = 5\, m$$

Risultato senza senso!!!

ESEMPI (2) cont.



Ci sono due possibilità:
- non è valida la conservazione dell'energia totale meccanica;
- è valida, ma è stata applicata male.

$$T_A + U_A = T_B + U_B \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv^2 + 0 = 0 + mgh$$

Il corpo è fermo

Il corpo si trova sul piano di riferimento dal quale si misurano le altezze

$$E_{TOT} = T_A = \frac{1}{2}mv^2 = 50m \;\; J$$

$$U_{MAX} = mg2L \approx 20m \;\; J$$

$$E_{TOT} > U_{MAX}$$ il pendolo non si ferma mai!

ESEMPI (3)

$h_A > h_B$

Consideriamo il profilo di figura in campo gravitazionale. Trascurando tutti gli attriti, calcolare il modulo della velocità che bisogna imprimere alla sfera nel punto A, affinché arrivi ferma nel punto B.

Le forze che agiscono sul corpo sono la forza peso e la reazione vincolare del profilo. Quest'ultima non compie lavoro e quindi non può cambiare l'energia del corpo, ma solamente la sua traettoria. Dal punto di vista energetico agisce solo la forza peso, che è conservativa.

$$T_A + U_A = T_B + U_B \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv_A^2 + mgh_A = 0 + mgh_B$$

$$v_A = \sqrt{2g\left(h_B - h_A\right)}$$

Il modulo della velocità un numero immaginario?

Risultato assurdo!

ESEMPI (3) cont.

$h_A > h_B$

Ci sono due possibilità:

- non è valida la conservazione dell'energia totale meccanica;
- è valida, ma è stata applicata male.

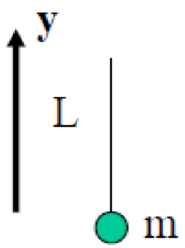
$$T_A + U_A = T_B + U_B$$

T_B non può essere nulla perché

$$T_B = U_A - U_B$$

L'energia cinetica in A al minimo può essere zero, ma deve valere contemporaneamente che $U_A > U_B$ e l'energia totale meccanica si deve conservare.

ESEMPI (4)



Consideriamo il pendolo di figura composto da un filo inestensibile lungo L ed una massa m. Calcolare la tensione del filo.

Le forze che agiscono sul corpo sono la forza peso P e la tensione del filo T e poiché il corpo si trova in equilibrio, possiamo scrivere

$$\vec{P} + \vec{T} = 0$$

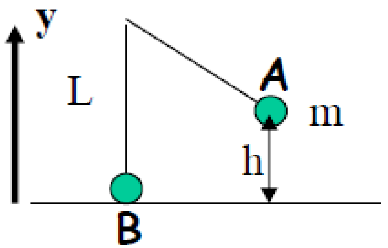
quindi

$$-mg + T = 0$$

da cui

$$T = mg$$

ESEMPI (5)



Consideriamo il pendolo di figura composto da un filo inestensibile lungo L ed una massa m. Facciamo partire, da fermo, la massa m da un'altezza h (punto A). Quanto vale la tensione T del filo nel punto B?

Nel punto B le forze che agiscono sul corpo sono la forza peso P e la tensione del filo T e poiché il corpo percorre una traiettoria circolare, possiamo scrivere

$$\vec{P} + \vec{T} = \vec{F}_{centripeta}$$

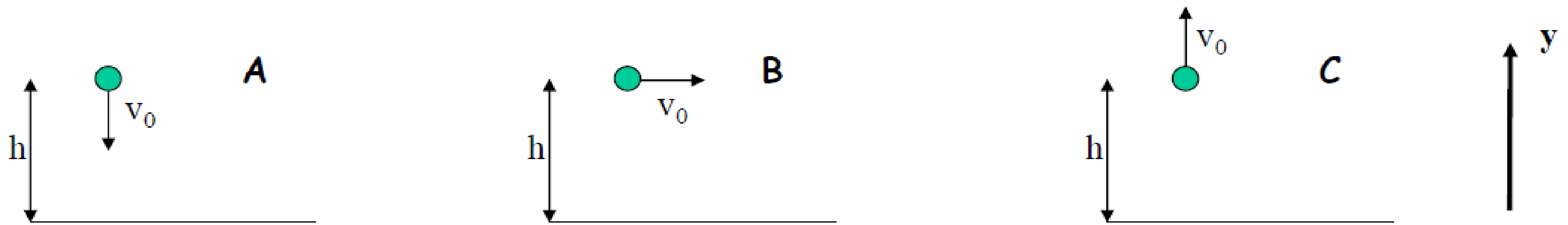
Per la conservazione dell'energia totale meccanica avremo

$$E_B = E_A \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv^2 = mgh \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2gh}$$

quindi

$$-mg + T = m\frac{v^2}{L} \quad \Rightarrow \quad T = mg\left(1 + \frac{2h}{L}\right)$$

ESEMPI (6)



Consideriamo le tre masse identiche di figura: calcolarne i moduli delle velocità quando toccano il suolo ed i tempi di caduta.
L'unica forza agente in tutti e tre i casi è la forza peso e quindi per la conservazione dell'energia totale meccanica

$$\frac{1}{2}mv_{A,B,C}^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh \quad \Rightarrow \quad v_{A,B,C} = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$$

Le tre masse si muovono di moto uniformemente accelerato e quindi

$$y_A = -\frac{1}{2}gt_A^2 - v_0 t_A + h$$
$$y_B = -\frac{1}{2}gt_B^2 + h$$
$$y_C = -\frac{1}{2}gt_C^2 + v_0 t_C + h$$

$$t_A = \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 + 2gh}}{-g}$$
$$t_B = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$
$$t_C = \frac{-v_0 - \sqrt{v_0^2 + 2gh}}{-g}$$

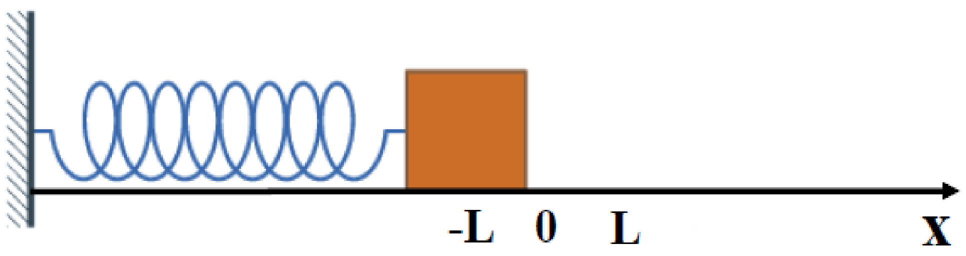
ESEMPI (7)

Consideriamo il corpo di massa m, connesso ad una molla ideale, di costante elastica k. Supponiamo che all'inizio (t=0) valgano le condizioni al contorno: x(0)=-L v(0)=0: calcolare il modulo della velocità del corpo nel punto x=0.
Sul corpo agiscono la forza peso, la reazione vincolare del piano di appoggio e la forza della molla.
La somma della forza peso e della reazione vincolare è zero, perché il corpo si muove sul piano di appoggio.
Quindi la forza risultante è quella della molla ed essendo conservativa possiamo scrivere

$$T_{x=-L} + U_{x=-L} = T_{x=0} + U_{x=0}$$

$$0 + \frac{1}{2}kL^2 = \frac{1}{2}mv^2 + 0$$

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}}L$$



IMPULSO E QUANTITA' DI MOTO

Si definisce **impulso** di una forza

$$\vec{I} = \vec{F} \cdot \Delta t$$

dove Δt è il tempo durante il quale la forza agisce

$$[I] = N \cdot T = M \cdot L \cdot T^{-2} \cdot \mathrm{T} = M \cdot L \cdot T^{-1} \quad \Rightarrow \quad \{\mathrm{mks}\}\ \mathrm{Kg\ m\ s^{-1}}$$

Si definisce quantità di moto

$$\vec{Q} = m\vec{v}$$

$$[Q] = M \cdot L \cdot T^{-1} \quad \Rightarrow \quad \{\mathrm{mks}\}\ \mathrm{Kg\ m\ s^{-1}}$$

L'impulso e la quantità di moto sono VETTORI

TEOREMA DELL'IMPULSO

L'impulso di una forza è eguale alla variazione della quantità di moto del corpo sul quale la forza agisce

$$\boxed{\vec{I} = \vec{F} \cdot \Delta t = \vec{Q}_2 - \vec{Q}_1 = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1}$$

CONSERVAZIONE DELLA QUANTITA' DI MOTO

Poiché per il III° Principio della Dinamica vale che

$$\sum \vec{F}_{\text{int}} = 0$$

Se vale anche

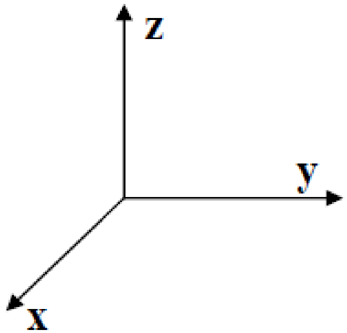
$$\sum \vec{F}_{ext} = 0$$

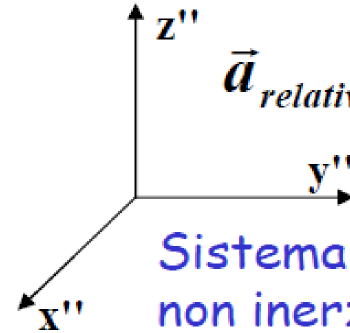
avremo

$$\boxed{\sum \vec{F}_{ext} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum \vec{I} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum \Delta \vec{Q} = 0}$$

In un sistema isolato la quantità di moto si conserva

La relatività galileiana (1)



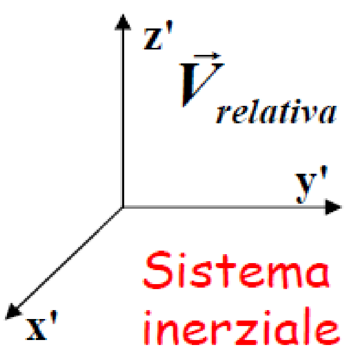


$$\vec{a}_{relativa} = \text{costante}$$

Sistema di riferimento non inerziale

$$\vec{a}^{\,''} = \vec{a} - \vec{a}_{relativa}$$

$$t^{''} = t$$



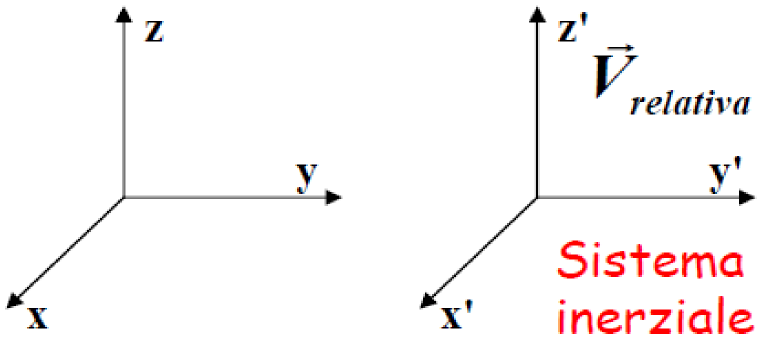
$$\vec{V}_{relativa} = \text{costante}$$

Sistema di riferimento inerziale

$$\vec{V}^{\,'} = \vec{V} - \vec{V}_{relativa}$$

$$t^{'} = t$$

La relatività galileiana (2)

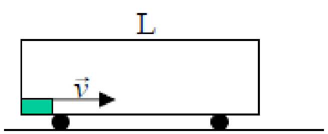


$$\vec{V}_{relativa} = \text{costante}$$

Sistema di riferimento inerziale

$$\vec{V}' = \vec{V} - \vec{V}_{relativa}$$

$$t' = t$$



Nel sistema solidale con terra :

$$\vec{Q}_1 + \vec{Q}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad mv - Mv_c = 0 \quad \Rightarrow \quad v_c = \frac{mv}{M}$$

per lo spazio percorso vale

$$vt = L - v_c t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{L}{v + v_c}$$

Nel sistema solidale con il carrello :

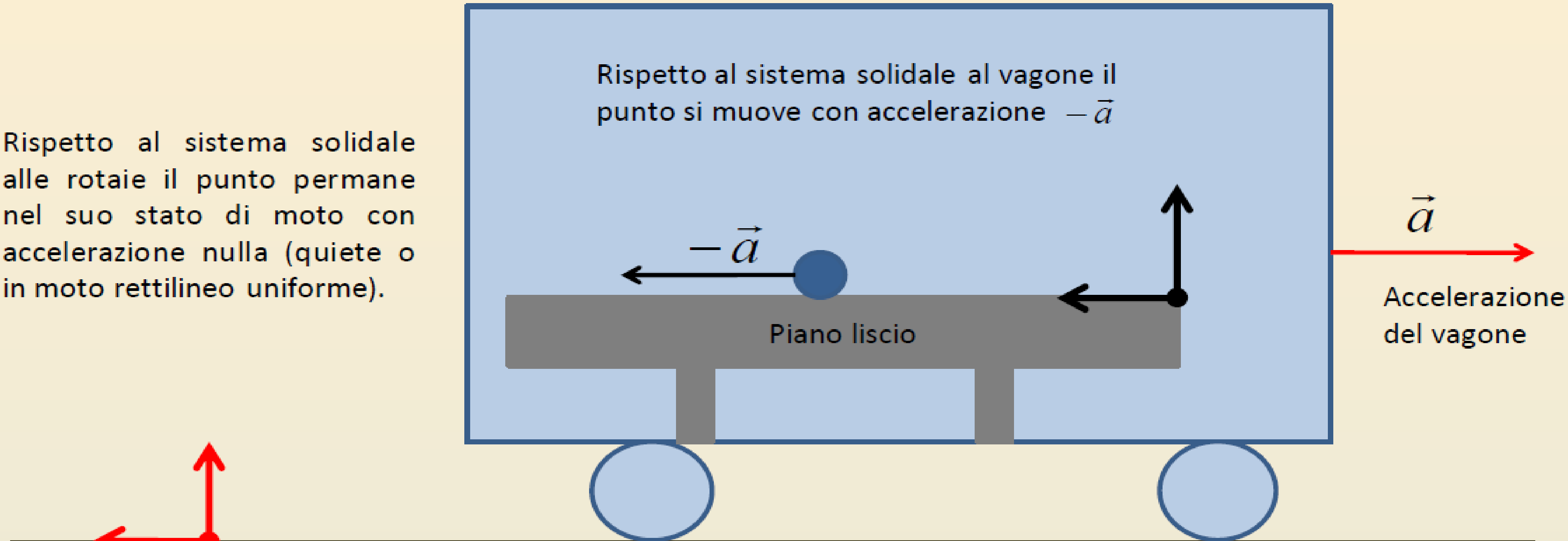
$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_{relativa} \quad \Rightarrow \quad v' = v + v_c \quad \Rightarrow \quad t' = \frac{L}{v'} = \frac{L}{v + v_c} = t$$

I fenomeni hanno lo stesso aspetto

9. Forza di trascinamento - moto traslatorio

Il sistema mobile (solidale al vagone) si muove di moto **traslatorio** rispetto a quello fisso (inerziale), solidale alle rotaie.

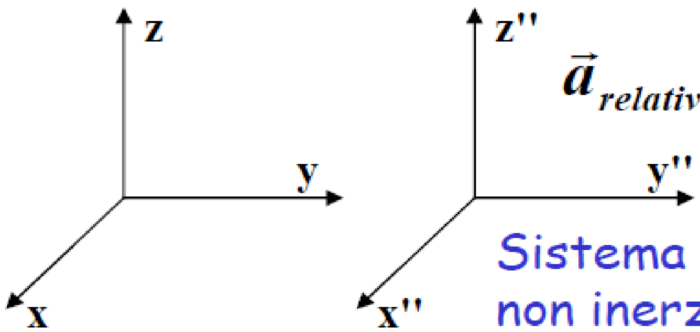
Rispetto al sistema solidale alle rotaie il punto permane nel suo stato di moto con accelerazione nulla (quiete o in moto rettilineo uniforme).



In un sistema di riferimento non inerziale, in moto traslatorio rispetto ad un sistema di riferimento inerziale, oltre alle forze effettivamente agenti sul punto (forze effettive), il punto è soggetto ad una forza legata all'accelerazione ***a*** del sistema, detta forza apparente di trascinamento:

$$\boxed{\vec{F}_{tr} = -m\vec{a}}$$

La relatività galileiana (3)

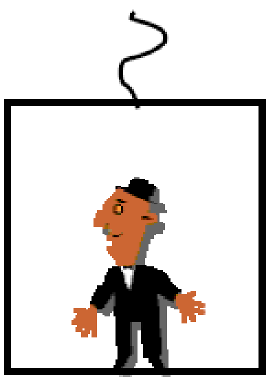


$$\vec{a}_{relativa} = \text{costante}$$

Sistema di riferimento non inerziale

$$\vec{a}'' = \vec{a} - \vec{a}_{relativa}$$

$$t'' = t$$



Caduta libera

Nel sistema solidale con terra, l'uomo e l'ascensore cadono con la stessa accelerazione (a=g) e quindi le loro posizioni relative non cambiano.
L'uomo non ha peso.

Nel sistema solidale con l'ascensore:

$$\vec{a}''_{uomo} = \vec{a} - \vec{a}_{relativa} \quad \Rightarrow \quad a''_{uomo} = g - g = 0$$

L'uomo non ha peso.

I fenomeni** **<u>non</u> hanno lo stesso aspetto