Università degli Studi di Perugia
Facoltà di Medicina e Chirurgia

Fisica

Leonello Servoli

Leonello.servoli@pg.infn.it

Tel.: 0039-348-3345847

http://www.fisica.unipg.it/~servoli

LE FORZE

forza gravitazionale:
ha la propria sorgente nella massa

forza vincolare:
ha la propria sorgente nelle interazioni fra gli atomi che compongono il vincolo

forza d'attrito:
ha la propria sorgente nelle interazioni fra due superfici

forza costante:
non cambia nel tempo e nello spazio modulo, direzione e verso

forza centripeta:
permette ai corpi di compiere moti circolari

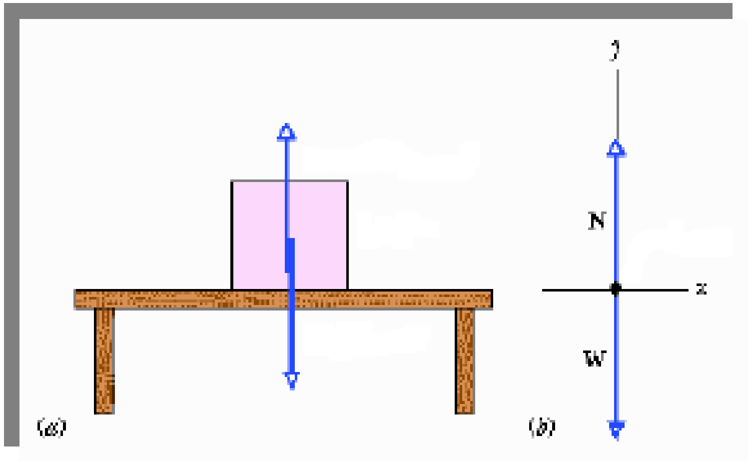
non esistono costanti o centripeti

FORZE DI REAZIONE VINCOLARE

Sono le forze esercitate dai vincoli cui è soggetto il corpo. L'azione del vincolo è rappresentata da una forza detta reazione vincolare.

Il corpo è in equilibrio sotto l'azione della forza peso **w** e della reazione vincolare **N** (normale alla superficie di contatto).

I° Principio della Dinamica

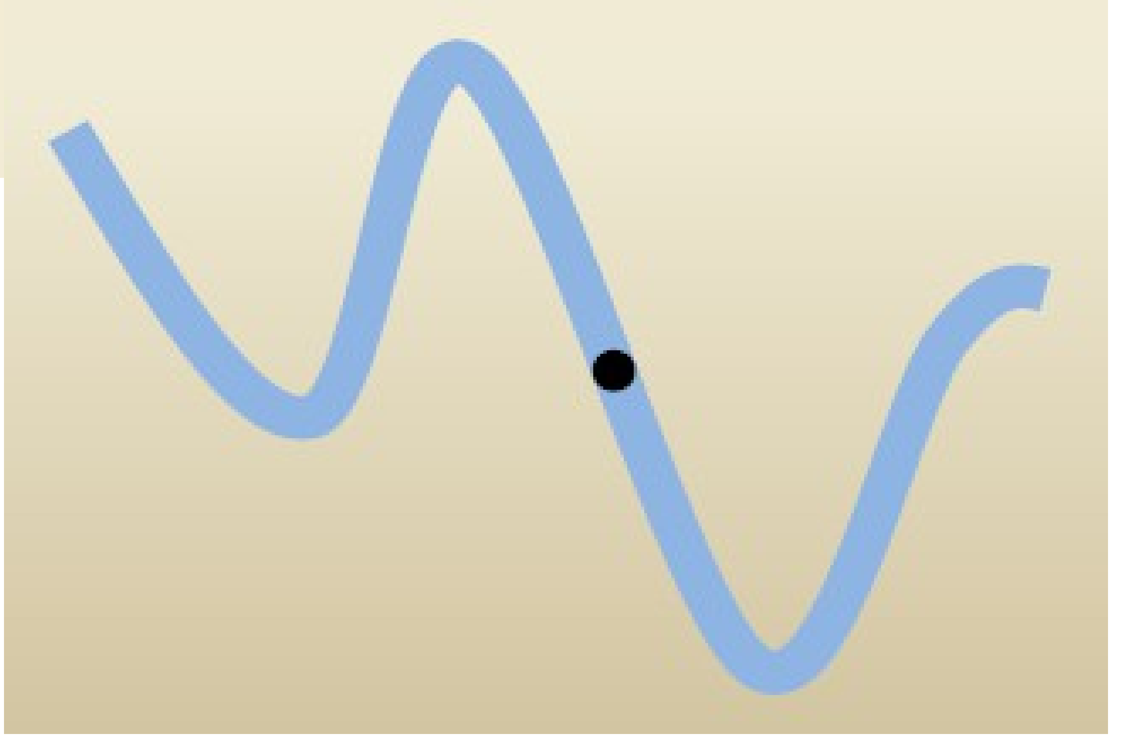


Le reazioni vincolari sono sempre ortogonali ai vincoli

FORZE DI REAZIONE VINCOLARE

Esempio: vincolo di appartenenza ad una guida.

Una locomotiva può muoversi solo lungo le rotaie. Per non far deragliare la locomotiva le rotaie esercitano sulle ruote del treno delle forze (reazioni vincolari).



FORZE DI ATTRITO (1)

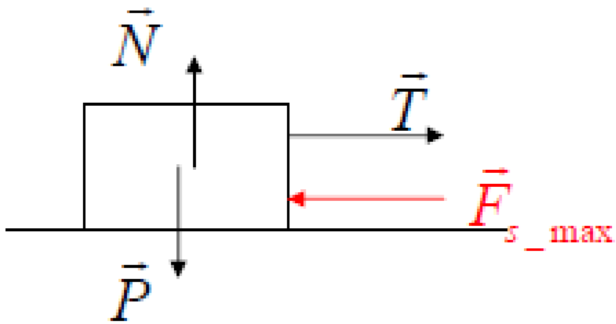
La forza di attrito si sviluppa quando due superfici ruvide slittano l'una sull'altra. È parallela alle superfici a contatto e si oppone al loro movimento relativo. Essa dipende dallo stato di rugosità delle superfici a contatto.

Dal punto di vista microscopico l'attrito è causato da tanti piccoli legami temporanei fra i punti di contatto fra le due superfici.

Per ridurre l'attrito: rotolamento o interposizione di liquidi

FORZE DI ATTRITO (2)

Alcune osservazioni empiriche:



1) F_{s_max} è indipendente dall'area di contatto

2) $F_{s\_max}=\mu_s N$ $\quad$ μ_s coefficiente di attrito statico

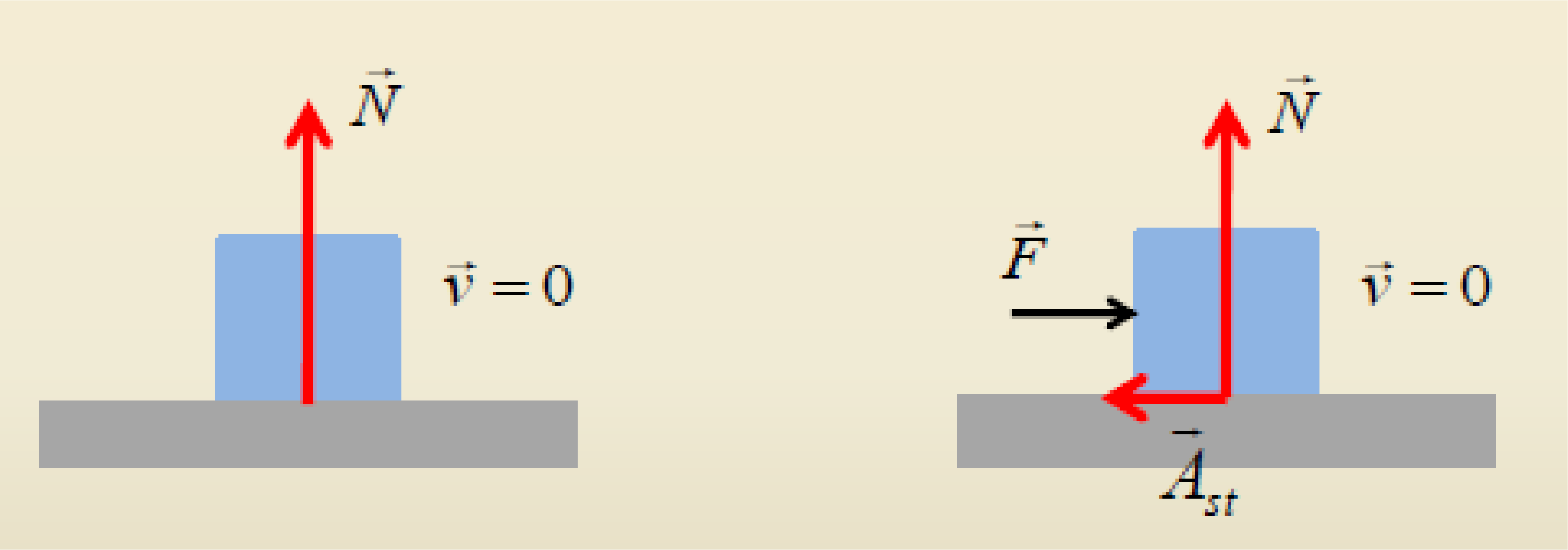
adimensionale

0.5-1.0 metallo/metallo;
0.04 teflon/metallo; >1 adesione

3) La forza per mantenere in moto un oggetto a velocità costante $F_d < F_{s\_max}$

$$F_d = \mu_d N \quad \Rightarrow \quad \mu_d < \mu_S$$

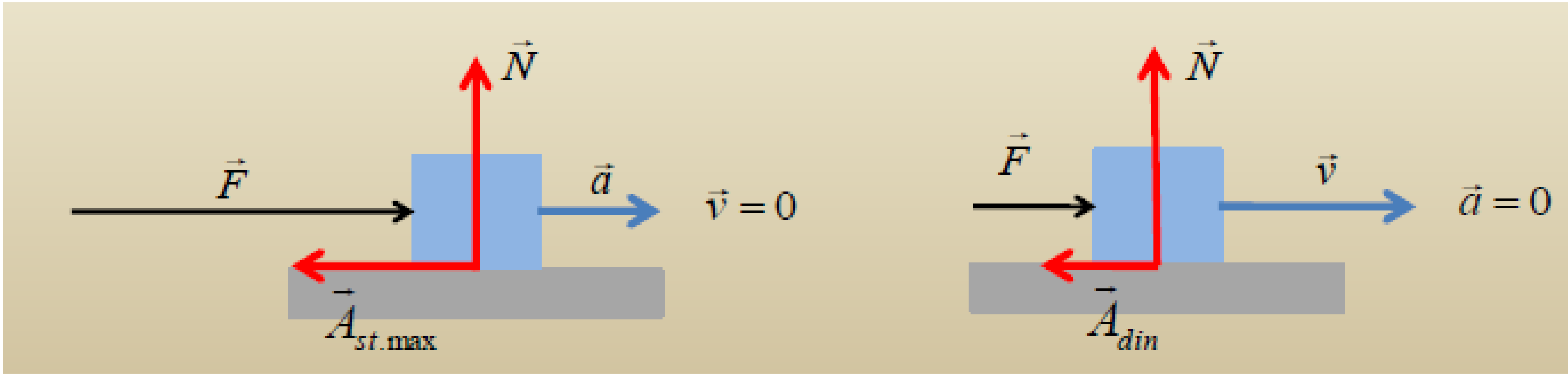
Vincolo di appoggio



Relazione vincolare

$$\vec{R} = \vec{N} + \vec{A}$$

Vincolo di appoggio



Legge dell'attrito statico	$\boxed{A_{st} \le \mu_S N = A_{st.\max}}$	$(\mu_D < \mu_S)$	$\mu_S =$ coefficiente di attrito statico
Legge dell'attrito dinamico	$\boxed{A_{din} = \mu_D N < A_{st.\max}}$		$\mu_D =$ coefficiente di attrito dinamico

FORZA CENTRIPETA: esempi

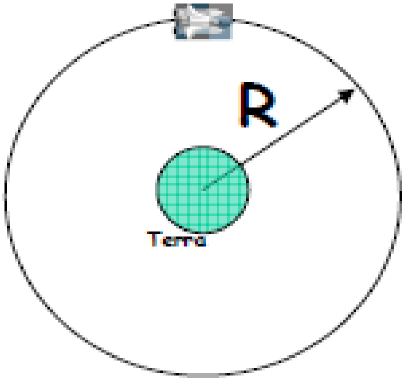
L'accelerazione centripeta a_R ha la direzione ed il verso di Δv, cioè è diretta verso il centro della circonferenza.

Dal II° Principio della Dinamica possiamo quindi dedurre che affinchè un corpo si muova di moto circolare uniforme deve esistere una *forza centripeta* diretta verso il centro della circonferenza e il cui modulo vale

$$\left|\vec{F}\right| = m\frac{v^2}{R}$$

FORZA CENTRIPETA: esempi

Supponiamo di avere una astronave che ruota lungo una orbita stazionaria circolare di raggio R: quanto vale il modulo della sua velocità di rotazione?



L'unica forza agente sull'astronave è la forza di attrazione gravitazionale fra le terra e l'astronave stessa

$$F = G\frac{mM_T}{R^2}$$

Poiché l'astronave descrive un moto circolare uniforme la forza F deve essere centripeta e quindi

$$F = G\frac{mM_T}{R^2} = ma = m\frac{v^2}{R} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{G\frac{M_T}{R}}$$

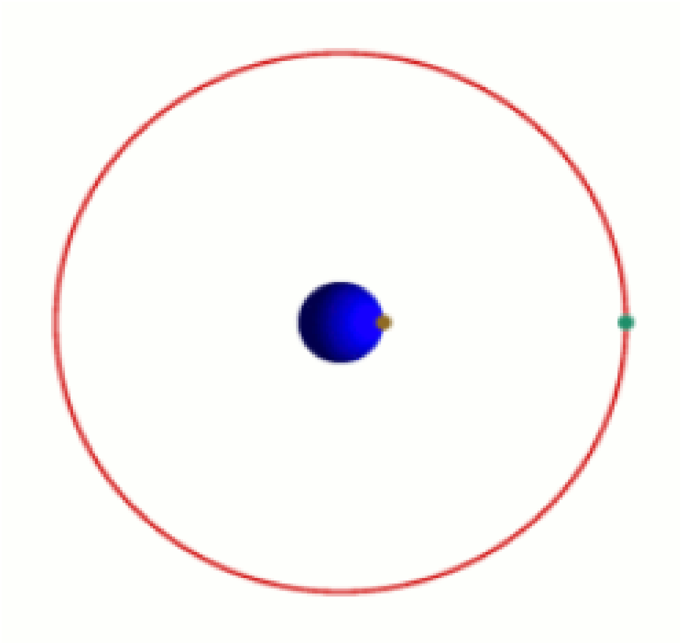
SATELLITI

Come si vede dalla formula

$$v = \sqrt{G\frac{M_T}{R}}$$

fissata la velocità di rotazione del satellite, è fissato il raggio dell'orbita e viceversa.

Per satelliti GEO (Geostationary Earth Orbit) avremo



$$v_{GEO} \approx 3\ \text{Km/s} = 11000\ \text{Km/h}$$

$$R_{GEO} \approx 42000\ \text{Km}$$

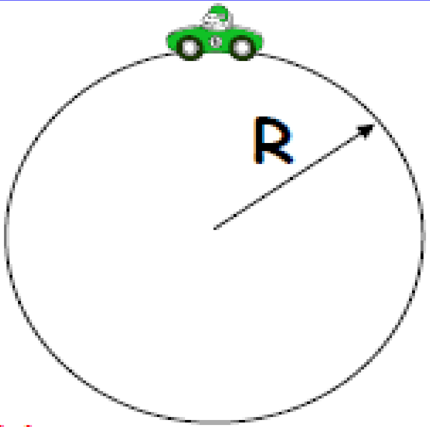
$$R_{GEO} = R_{Terra} + h$$

$$\Downarrow$$

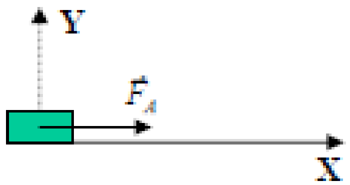
$$h \approx 36000\ \text{Km}$$

FORZA CENTRIPETA: esempi

Supponiamo di avere un'auto che percorre una curva *piana* circolare di raggio R: quanto vale il modulo della velocità massima con la quale può percorrere la curva senza slittare?



L'unica forza capace di produrre una accelerazione centripeta è la forza d'attrito fra le ruote e la strada. Quindi la massima forza d'attrito producibile pone un limite alla velocità con cui l'auto può percorrere la curva senza slittare.



L'attrito in questione è quello statico (μ_S) perché, nel punto di contatto, il pneumatico è momentaneamente fermo, lungo il raggio della curva, rispetto alla strada. Se si supera v_{max} l'auto inizia a slittare e la forza d'attrito diminuisce ($\mu_d < \mu_S$) e quindi la macchina non si controlla.

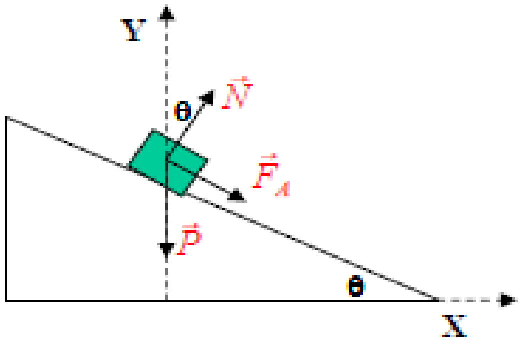
$$\vec{F}_A = \vec{F}_{centripeta} \qquad \vec{F}_A(\mu_S mg; 0) \qquad \vec{F}_{centripeta}\left(F_{centripeta}; 0\right)$$

$$F_A = \mu_S mg = ma = m\frac{v^2}{R} \quad \Rightarrow \quad v_{max} = \sqrt{R\mu_S g}$$

Senza attrito non si può fare la curva

FORZA CENTRIPETA: esempi

Supponiamo di avere un'auto che percorre una curva *rialzata* circolare di raggio R: quanto vale il modulo della velocità massima con la quale può percorrere la curva senza slittare?



La somma delle forze agenti deve produrre una forza centripeta

$$\vec{F}_A + \vec{P} + \vec{N} = \vec{F}_{centripeta}$$

$$\vec{F}_A(\mu_S N\cos\theta; -\mu_S N\sin\theta) \qquad \vec{P}(0; -mg)$$

$$\vec{N}(N\sin\theta; N\cos\theta) \qquad \vec{F}_{centripeta}(F_{centripeta}; 0)$$

$$\begin{cases} \mu_S N\cos\theta + 0 + N\sin\theta = F_{centripeta} \\ -\mu_S N\sin\theta - mg + N\cos\theta = 0 \end{cases} \Longrightarrow N = \frac{mg}{(\cos\theta - \mu_S\sin\theta)}$$

$$F_{centripeta} = mg\frac{\sin\theta + \mu_S\cos\theta}{\cos\theta - \mu_S\sin\theta}$$

$$\mu_S = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{centripeta} = mg\,tg\theta$$

$$\theta = 0^o \quad \Rightarrow \quad F_{centripeta} = \mu_S mg$$

Curva piana

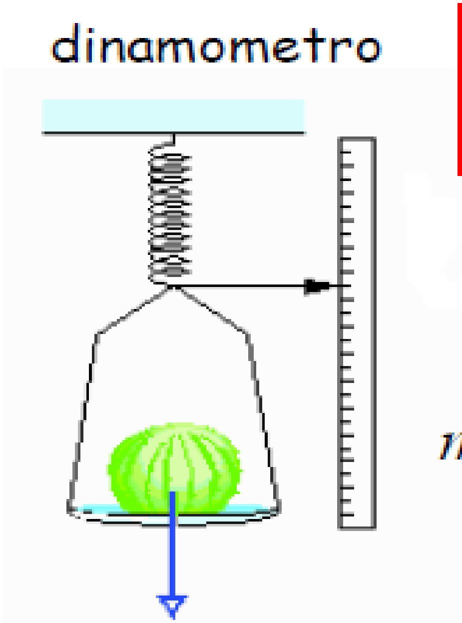
Senza attrito si può fare la curva

FORZE ELASTICHE: LE MOLLE

Consideriamo una molla ideale di costante elastica k.
Queste molle esercitano forze elastiche del tipo

$$\vec{F} = -k\vec{x} \qquad \left\{ \left[k \right] = Nm^{-1} \right\}$$

dove x è l'elongazione della molla ed il segno meno indica che la forza si oppone allo spostamento.



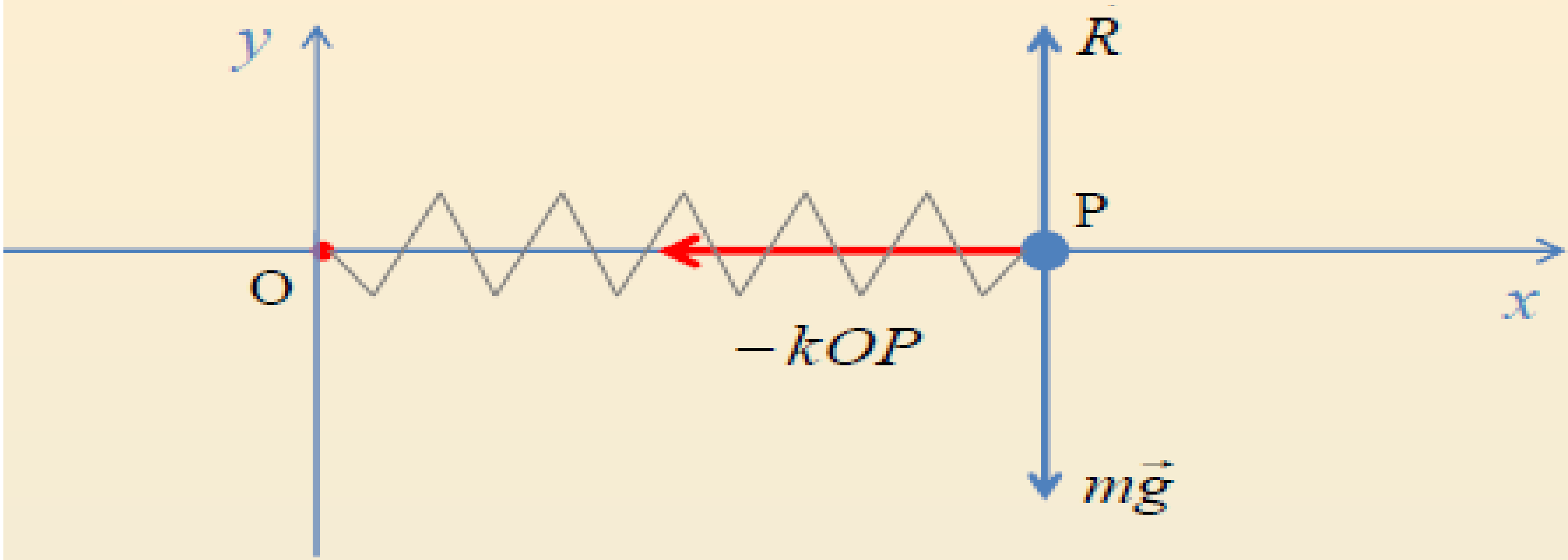
Poiché il dinamometro è in equilibrio deve valere, per il I° Principio della Dinamica

$$\vec{P} + \vec{F} = 0$$

$$mg - kx = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{mg}{k}$$

Misura diretta della forza

Oscillazioni libere



1) Forze agenti: $m\vec{g},\ -k\vec{OP},\ \vec{R}$

2) Equazione della dinamica $m\vec{a} = \vec{F} \rightarrow m\vec{a} = m\vec{g} - k\vec{OP} + \vec{R}$

Oscillazioni libere

3) Proiezione sugli assi x e y

$$\begin{cases} ma_x = -kx \\ 0 = -mg + R \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x \\ R = mg \end{cases}$$

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta_0)$$

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega_0 A \sin(\omega t + \theta_0)$$

$$a_x(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 A \cos(\omega t + \theta_0)$$

$x = x_{max} = A \qquad v_x = 0 \qquad a_x = (a_x)_{min} = -\omega_0^2 A$

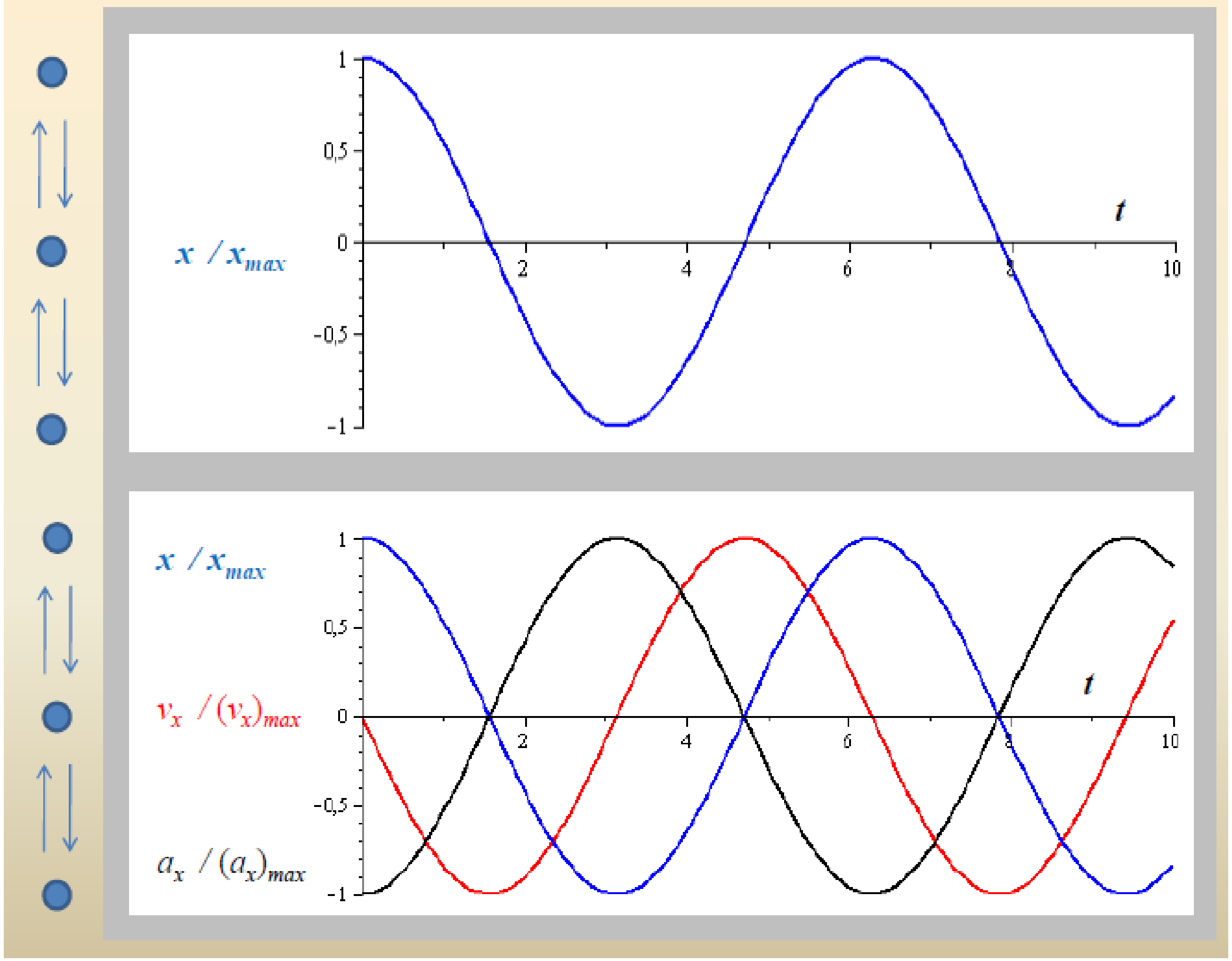
$x = 0 \qquad v_x = (v_x)_{min} = -|\omega_0| A \qquad a_x = 0$

$x = x_{min} = -A \qquad v_x = 0 \qquad a_x = (a_x)_{max} = \omega_0^2 A$

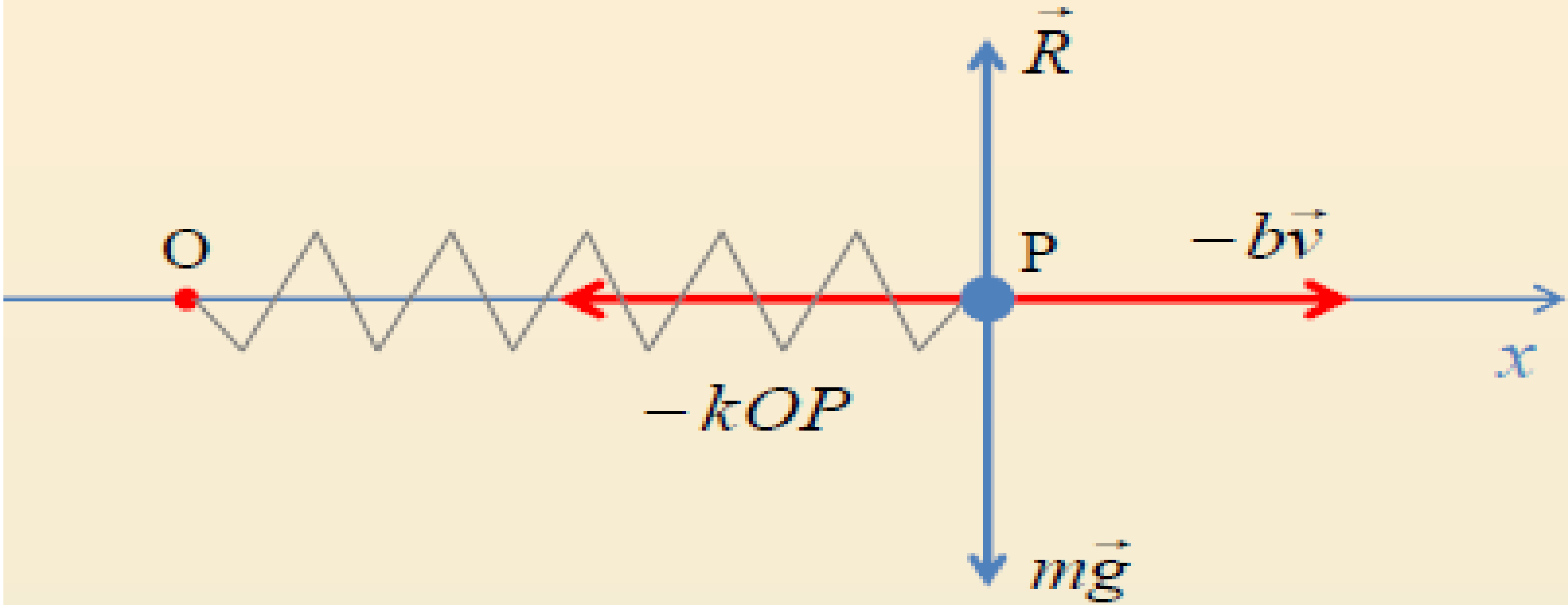
$x = 0 \qquad v_x = (v_x)_{max} = |\omega_0| A \qquad a_x = 0$

Oscillazioni libere

Rappresentazione grafica



Oscillazioni smorzate



1) Forze agenti: $m\vec{g},\ -kOP,\ \vec{R},\ -b\vec{v}$

2) Equazione della dinamica $m\vec{a} = \vec{F} \quad \rightarrow \quad m\vec{a} = m\vec{g} - kOP - b\vec{v} + \vec{R}$

Oscillazioni smorzate

3) Proiezione sugli assi x e y

$$\begin{cases} ma_x = -kx - bv_x \\ 0 = -mg + R \end{cases}$$

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} + b\dfrac{dx}{dt} + kx = 0 \\ R = mg \end{cases}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$ dove $$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \gamma = \frac{b}{2m}$$

$$\omega_0 > \gamma \quad \rightarrow \quad x(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega_S t + \theta_0) \qquad \omega_S = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

piccoli smorzamenti: oscillazioni smorzate

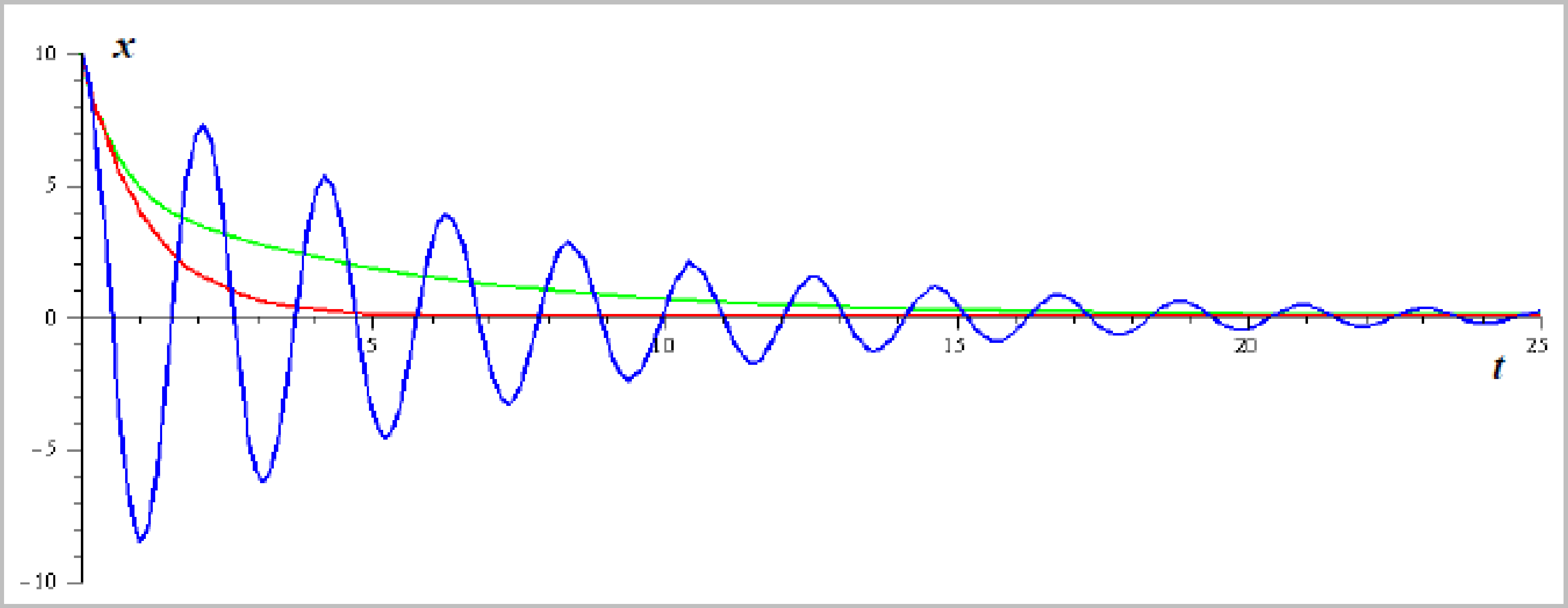
$$\omega_0 = \gamma \quad \rightarrow \quad x(t) = e^{-\gamma t}(c_1 + c_2 t)$$

smorzamento critico

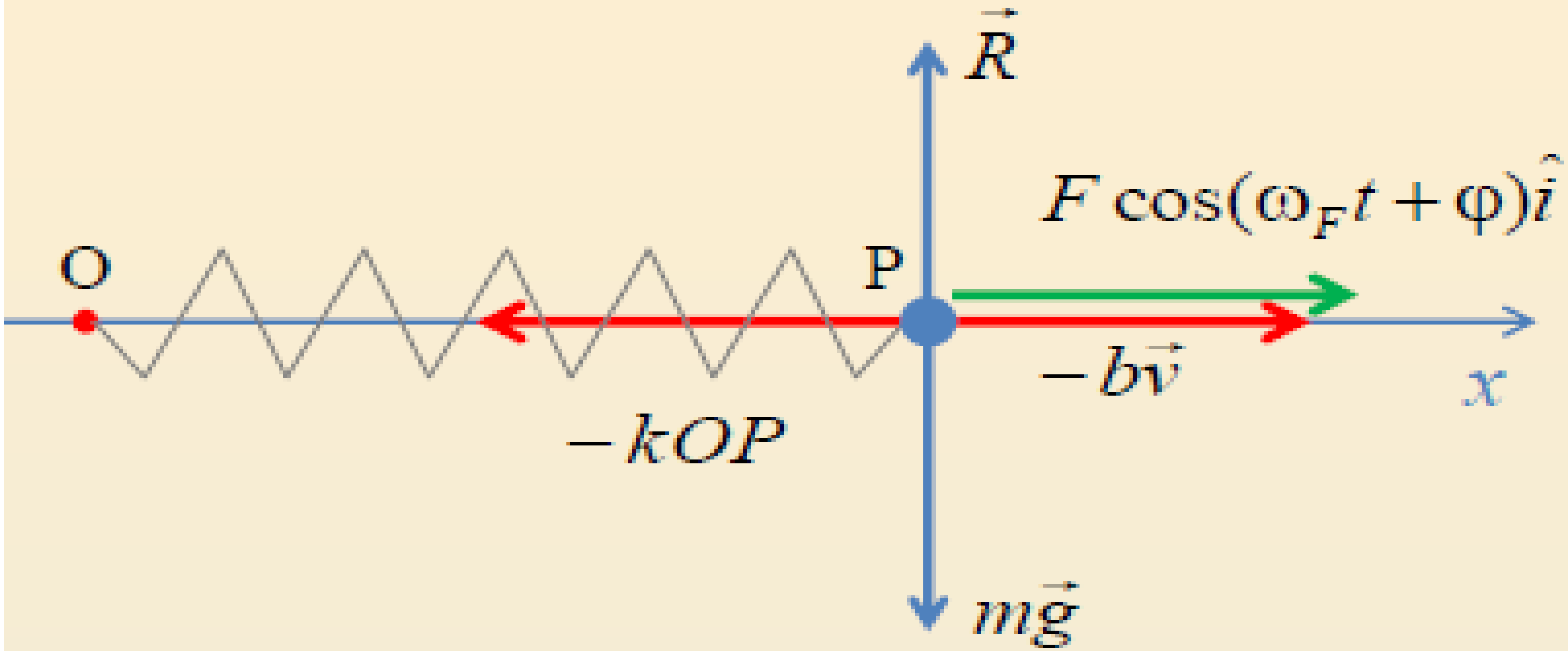
$$\omega_0 < \gamma \quad \rightarrow \quad x(t) = c_1 e^{\left(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\right)t} + c_2 e^{\left(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\right)t}$$

grandi smorzamenti: smorzamento aperiodico

Oscillazioni smorzate



Oscillazioni forzate



1) Forze agenti: $m\vec{g},\ -kOP,\ \vec{R},\ -b\vec{v},\quad F\cos(\omega_F t+\varphi)\hat{i}$

2) Equazione della dinamica $m\vec{a}=\vec{F} \quad \rightarrow \quad m\vec{a}=m\vec{g}-kOP-b\vec{v}+\vec{R}+F\cos(\omega_F t+\varphi)\hat{i}$

Oscillazioni forzate

3) Proiezione sugli assi x e y

$$\begin{cases} ma_x = -kx - bv_x + F\cos(\omega_F t + \varphi) \\ 0 = -mg + R \end{cases}$$

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} + b\dfrac{dx}{dt} + kx = F\cos(\omega_F t + \varphi) \\ R = mg \end{cases}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F}{m}\cos(\omega_F t + \varphi_F)$$

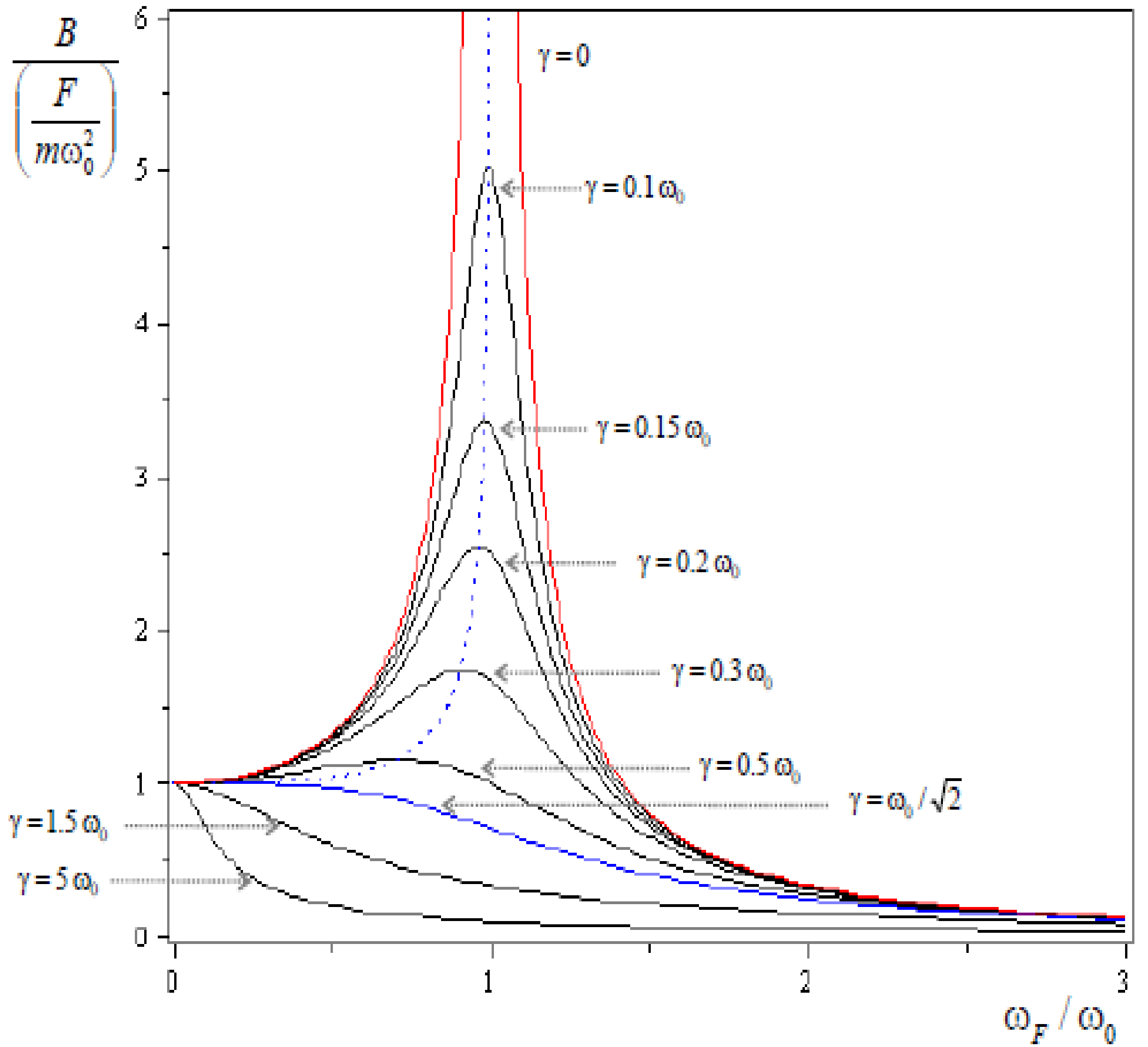
dove $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ $\gamma = \dfrac{b}{2m}$

$$x(t) = B\cos(\omega_F t + \varphi)$$

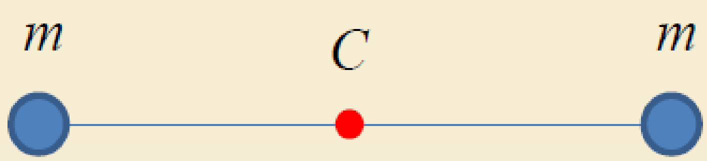
$$B = \frac{F/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_F^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega_F^2}}$$

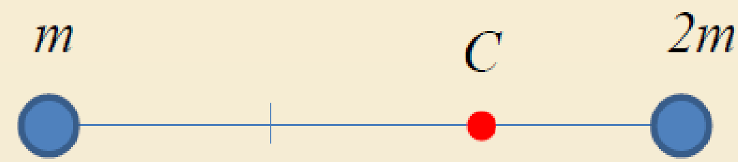
Oscillazioni forzate

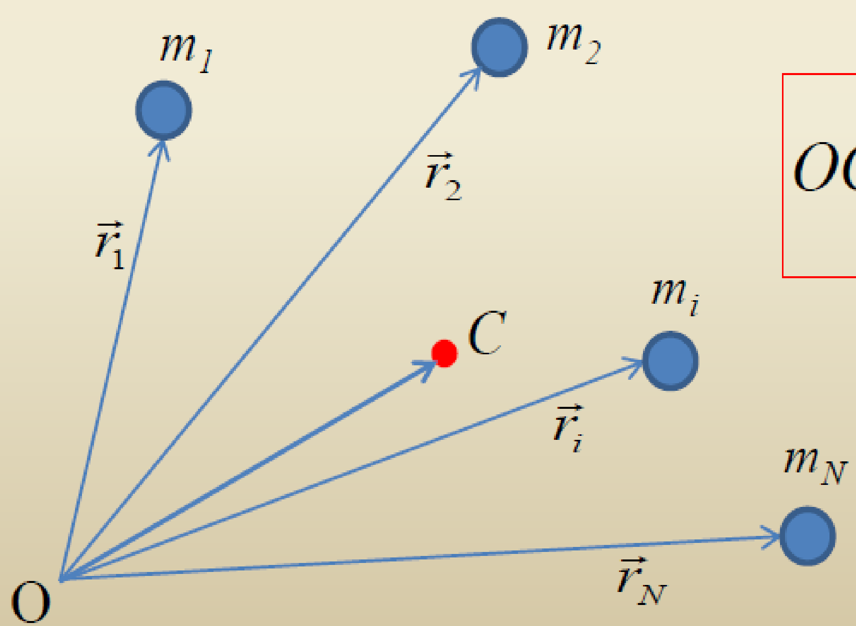
Per piccoli smorzamenti $\left(\gamma < \omega_0 / \sqrt{2}\right)$ l'ampiezza cresce quanto più la frequenza della forza esterna ω_F si avvicina alla frequenza delle oscillazioni libere ω_0 (frequenza propria), e quanto più piccolo è lo smorzamento γ.



Centro di massa di un sistema materiale







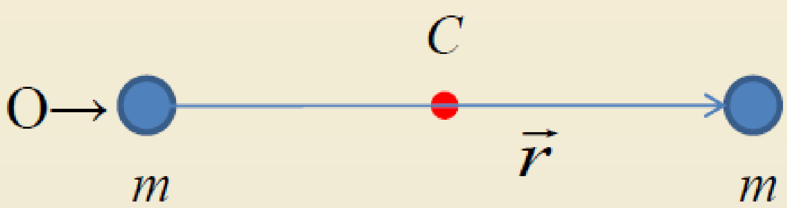
$$\boxed{OC = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \cdots + m_N\vec{r}_N}{m_1 + m_2 + \cdots + m_N} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i}$$

$$M\,\mathrm{OC} = \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i$$

Centro di massa di un sistema materiale

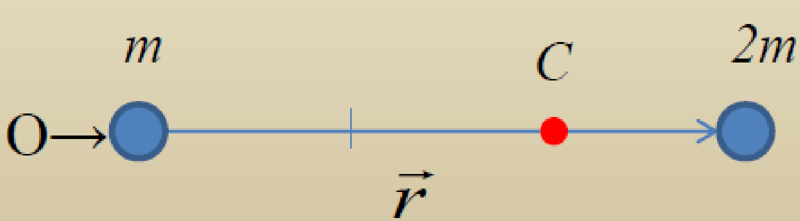
$$\boxed{OC = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \cdots + m_N\vec{r}_N}{m_1 + m_2 + \cdots + m_N}}$$

- 2 punti di uguale massa m



$$OC = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m \cdot 0 + m\vec{r}}{m + m} = \frac{\vec{r}}{2}$$

- due punti di massa m e $2m$



$$OC = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m \cdot 0 + 2m\vec{r}}{m + 2m} = \frac{2}{3}\vec{r}$$

Quantità di moto di un sistema materiale

Somma dei prodotti delle masse dei punti per le rispettive velocità

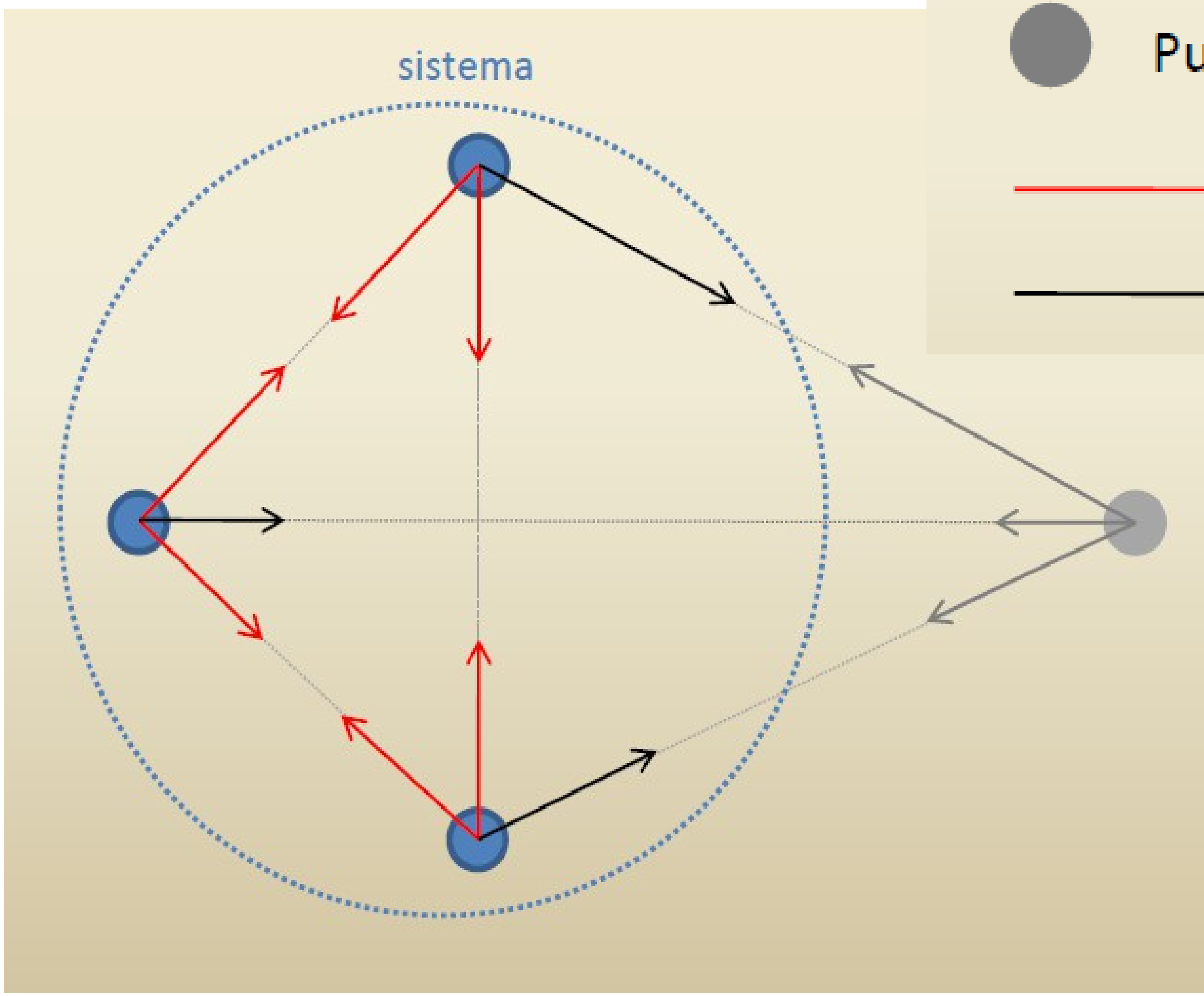
$$\boxed{\vec{Q} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i}$$

$$M\,OC = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \qquad M\,\vec{v}_C = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i \qquad M\,\vec{a}_C = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i$$

La quantità di moto di un qualsiasi sistema materiale si può sempre esprimere come il prodotto della massa del sistema per la velocità del centro di massa

$$\boxed{\vec{Q} = M\vec{v}_C} \longrightarrow \frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i = M\vec{a}_C$$

Forze interne e forze esterne al sistema



Punto appartenete al sistema

Punto non appartenete al sistema

forza interna

forza esterna

La somma di tutte le forze interne è nulla

$$\vec{R}^{(\mathrm{int})} = 0$$

Prima equazione cardinale della dinamica dei sistemi

$$\left.\begin{aligned} m_1\vec{a}_1 &= \vec{f}_1^{(\text{int})} + \vec{f}_1^{(est)} \\ m_2\vec{a}_2 &= \vec{f}_2^{(\text{int})} + \vec{f}_2^{(est)} \\ &\dots \\ m_N\vec{a}_N &= \vec{f}_N^{(\text{int})} + \vec{f}_N^{(est)} \end{aligned}\right\}$$

Seconda equazione della dinamica scritta per ciascun punto del sistema

$\vec{f}_i^{(\text{int})}$ Somma delle forze interne agenti sull'i-esimo punto

$\vec{f}_i^{(est)}$ Somma delle forze esterne agenti sull'i-esimo punto

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{a}_i = \cancel{\vec{R}^{(\text{int})}} + \vec{R}^{(est)}$$

La somma dei primi membri di queste equazioni deve essere uguale alla somma dei secondi membri

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{a}_i = M\vec{a}_C \\ \vec{R}^{(\text{int})} = 0 \end{cases}$$

segue

$$\boxed{M\vec{a}_C = \vec{R}^{(est)}}$$

Principio di conservazione della quantità di moto

Utilizzando al relazione $\frac{d\vec{Q}}{dt} = M\vec{a}_C$ la prima eq. cardinale $M\vec{a}_C = \vec{R}^{(est)}$ si può scrive nella forma

$$\boxed{\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{R}^{(est)}}$$

Teorema della quantità di moto

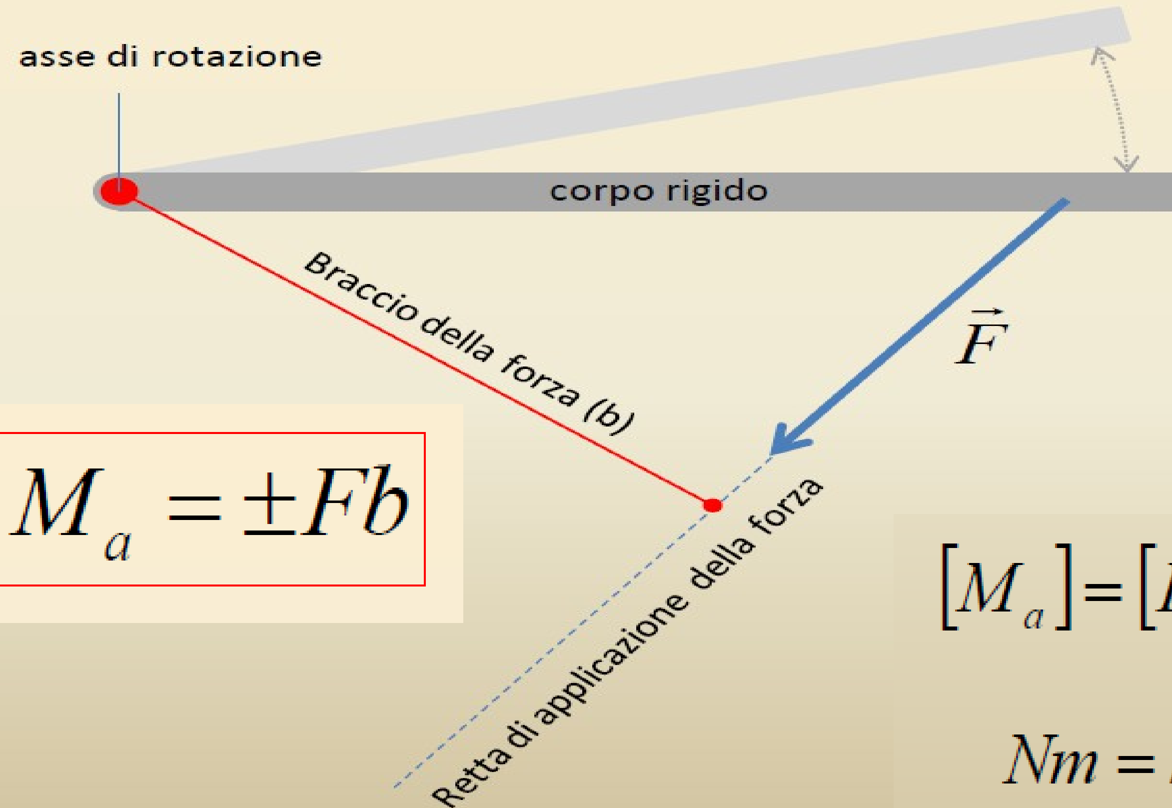
La derivata rispetto al tempo della quantità di moto di un sistema è uguale alla risultante delle forze esterne agenti sul sistema.

Principio di conservazione della quantità di moto

Se la risultante delle forze esterne agenti su un sistema è nulla, allora la quantità di moto del sistema si conserva costante nel tempo.

Se $\vec{R}^{(est)} = 0$ allora $\vec{Q} = \text{cost.} \Rightarrow \vec{v}_C = \text{cost}$

Momento di una forza



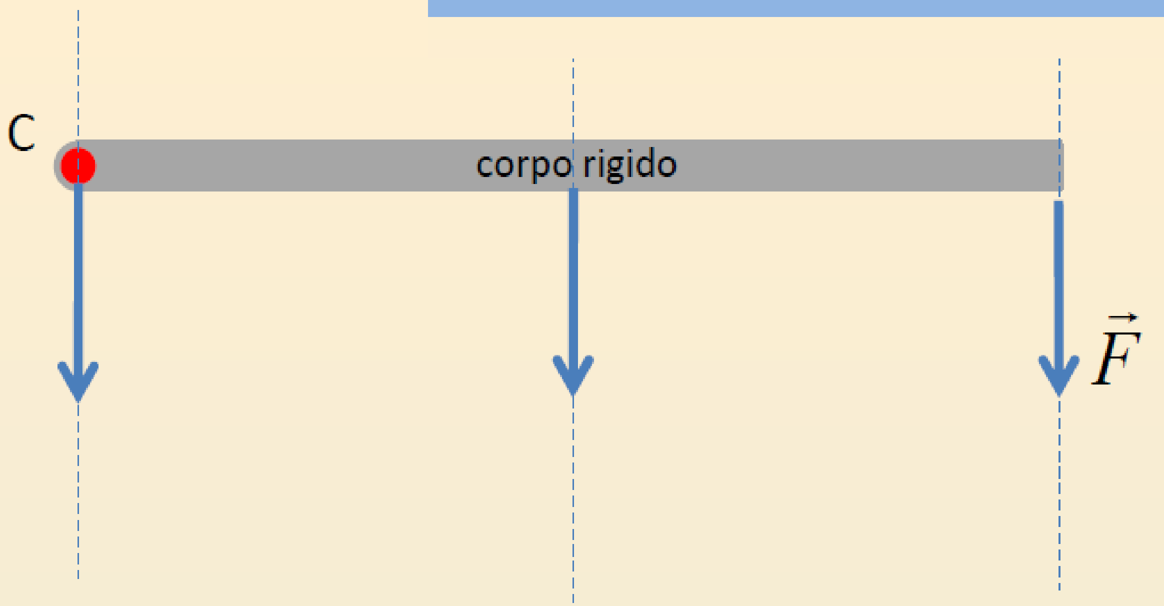
$$M_a = \pm Fb$$

$$[M_a] = [FL] = [MLT^{-2}L] = [ML^2T^{-2}]$$

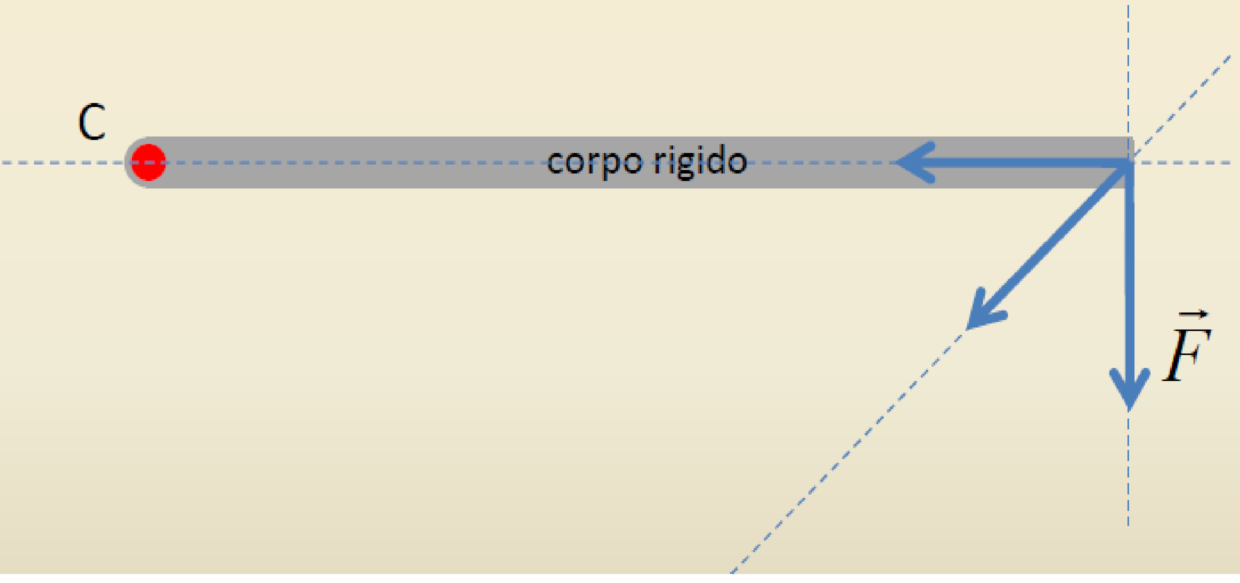
$$Nm = kg\, m^2\, s^{-2}$$

Dato un corpo rigido vincolato a ruotare attorno ad un asse fisso privo di attrito,
e una forza agente sul corpo e appartenente a un piano perpendicolare a tale asse,
si definisce momento della forza rispetto all'asse
il prodotto del modulo della forza per il suo braccio.
Il braccio è la minima distanza fra l'asse e retta di applicazione della forza.

Momento di una forza



Il braccio della forza (ed il momento) aumenta all'aumentare della distanza fra punto di applicazione della forza e centro di rotazione



Il braccio della forza (ed il momento) aumenta quanto più la forza è perpendicolare alla retta fra il punto di applicazione della forza e il centro di rotazione

Momento di inerzia

Definizione

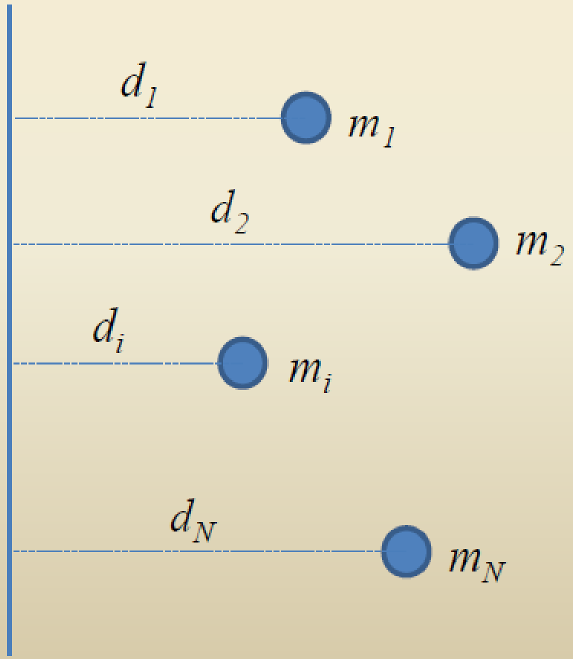
Data un asse a, si definisce momento di inerzia di un sistema rispetto all'asse a, e si indica con il simbolo I_a, la somma dei prodotti delle masse dei punti del sistema per i quadrati delle rispettive distanze dall'asse.

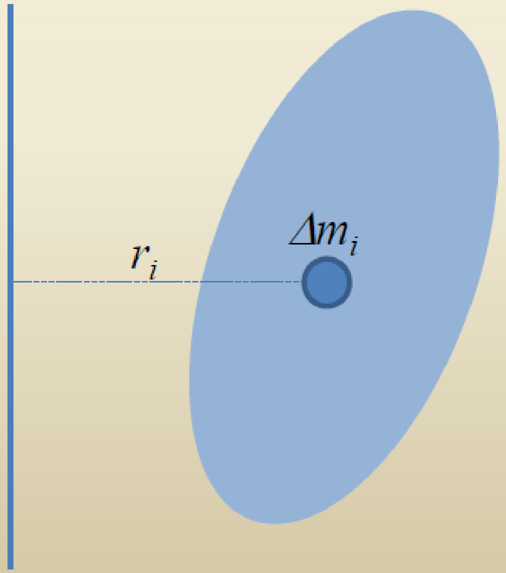
Sistema particellare

$$I_a = m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2 + \cdots + m_N d_N^2$$

Sistema continuo

$$I_a = \lim_{\Delta m_i \to 0} \left(\Delta m_1 r_1^2 + \Delta m_2 r_2^2 + \cdots + \Delta m_N r_N^2 \right) \equiv \int_M r^2 dm$$





Seconda equazione cardinale della dinamica dei sistemi

Grandezze traslazionali | **Grandezze rotazionali**

massa $m \leftrightarrow I_a$ Momento di inerzia

Accelerazione del centro di massa $\vec{a}_C \leftrightarrow \alpha$ Accelerazione angolare

Prima equazione cardinale della dinamica dei sistemi

$$M\vec{a}_C = \vec{R}^{(est)}$$

Seconda equazione cardinale della dinamica dei sistemi

$$I_a\alpha = M_a^{(est)}$$

Quantità di moto

$$\vec{Q} = M\vec{v}_C$$

Momento assiale della quantità di moto

$$L_a = I_a\omega$$

Teorema della quantità di moto

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{R}^{(est)}$$

Teorema del momento della quantità di moto

$$\frac{dL_a}{dt} = M_a^{(est)}$$

Principio di conservazione del momento angolare

$$\frac{dL_a}{dt} = M_a^{(est)} \Rightarrow \boxed{M_a^{est} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{dL_a}{dt} = 0 \;\Rightarrow\; L_a = \text{cost.}}$$

Principio di conservazione del momento assiale della quantità di moto

Se il momento assiale delle forze esterne agenti su un sistema è nullo,
allora il momento assiale della quantità di moto del sistema si conserva costante nel tempo.

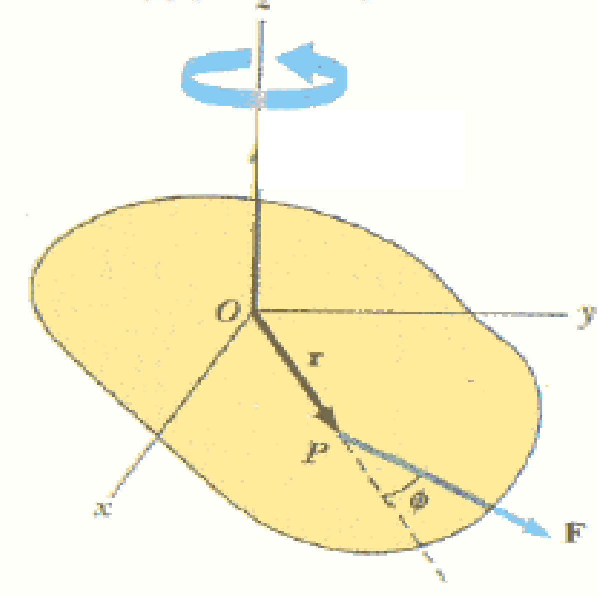
Equazioni cardinali della statica dei sistemi

$$\begin{cases} M\vec{a}_C = \vec{R}^{(est)} \\ I_a\alpha = M_a^{(est)} \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{a}_C = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \vec{R}^{(est)} = 0 \\ M_a^{(est)} = 0 \end{cases}$$

LA STATICA

Momento di una forza ($\vec{M}$): Il momento rispetto al punto arbitrario O di una forza $\vec{F}$ che agisce in un punto P di un corpo rigido (cioe' indeformabile) e' data dal prodotto vettoriale fra $\vec{r}$ (distanza di P da O) ed $\vec{F}$.

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$



Condizione di equilibrio:
nel caso di un sistema rigido devono essere nulle:

- la somma vettoriale di tutte le forze ad esso applicate (equilibrio traslazionale)
- la somma vettoriale dei momenti di tali forze (equilibrio rotazionale)

LE LEVE

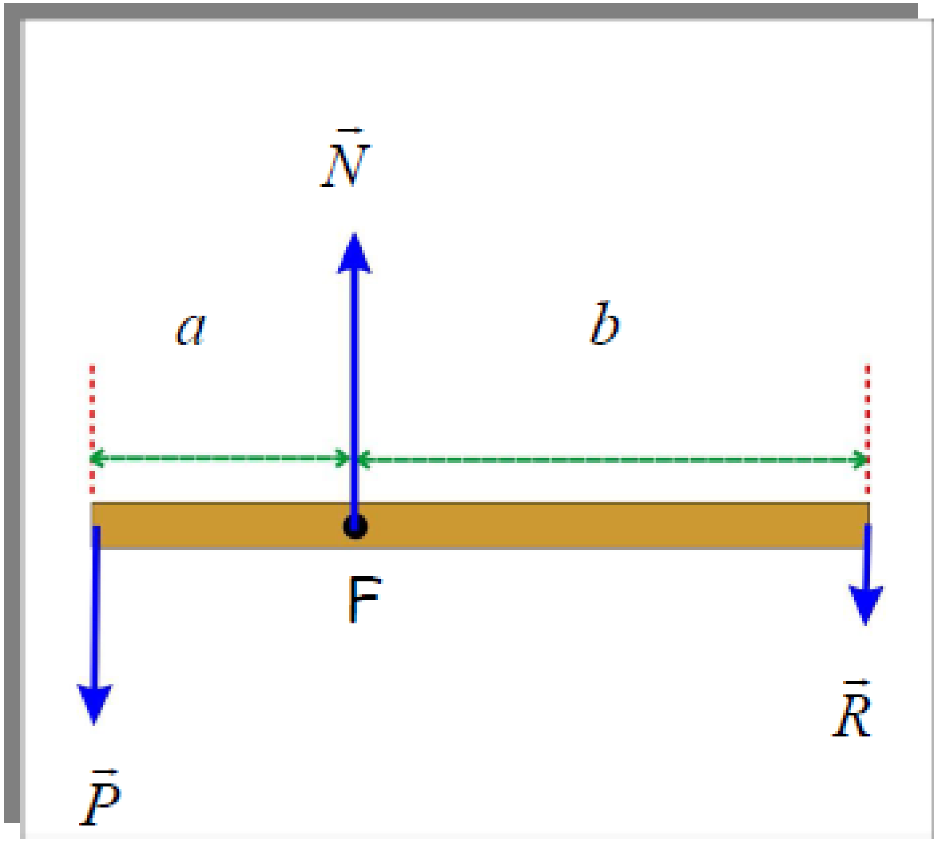
Leva: asta rigida che puo' ruotare attorno ad un asse ad essa perpendicolare detto fulcro sottoposta a 2 forze di cui una e' detta potenza e l'altra resistenza. La condizione di equilibrio e':

$$1) \qquad \vec{P} + \vec{R} + \vec{N} = 0$$

$$2) \qquad Pa = Rb$$

Guadagno :

$$G = \frac{R}{P} = \frac{a}{b}$$

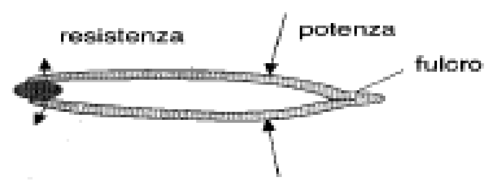


TIPI DI LEVE

Leva di 1° genere: Fulcro intermedio fra potenza e resistenza.
Puo' avere guadagno maggiore, minore o uguale ad 1.
Esempio: pinza

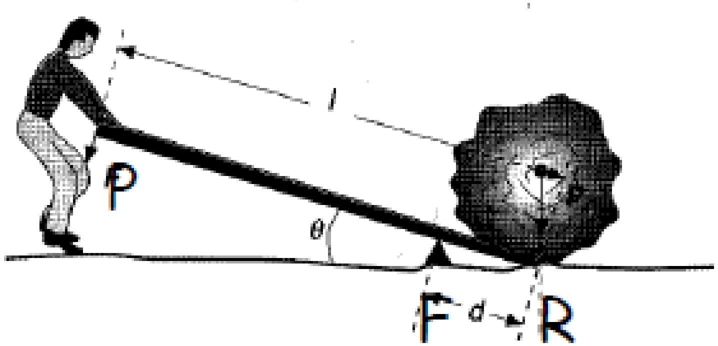
Leva di 2° genere: Resistenza intermedia fra fulcro e potenza.
Ha sempre guadagno maggiore di 1 (vantaggiosa).
Esempio: schiaccianoci

Leva di 3° genere: Potenza intermedia fra fulcro e resistenza.
Ha sempre guadagno minore di 1 (svantaggiosa).
Esempio: pinzette



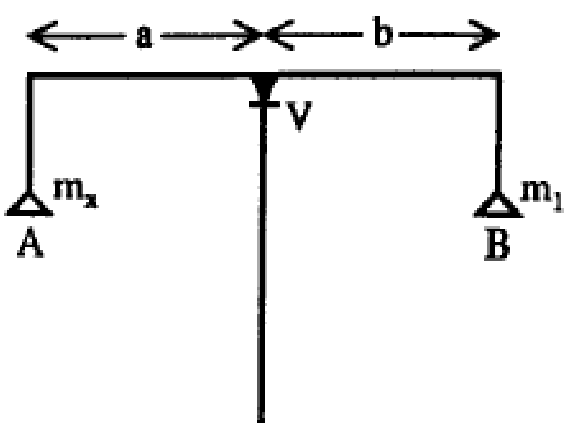
ESEMPI DI LEVE DI 1° GENERE

Asse per sollevare oggetti pesanti

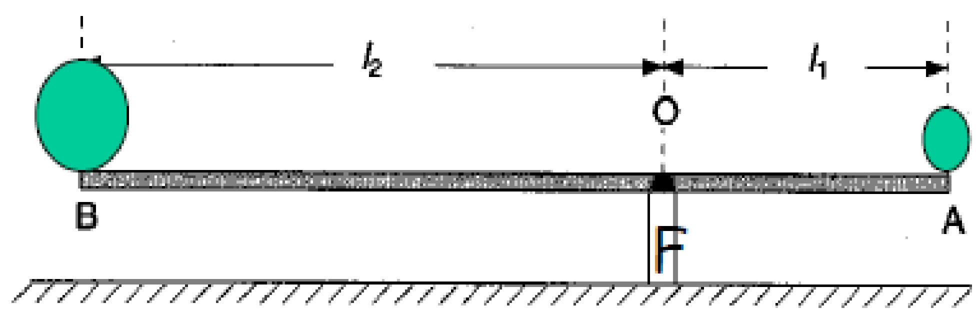


Barca a remi

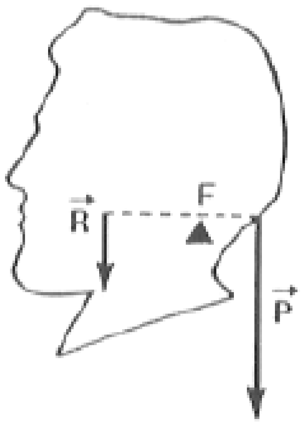
Bilancia



Altalena a bilico



LEVE DEL CORPO UMANO



Articolazione di appoggio della testa:

Leva di 1° genere, in questo caso svantaggiosa.

Fulcro = articolazione

Resistenza = peso (applicato nel baricentro)

Potenza = muscoli splenici

Massa della testa = 8 kg. Forza peso della testa: circa 80 N

Distanza fra il fulcro ed i muscoli splenici: 2 cm

Distanza fra il fulcro e il baricentro della testa: 8 cm

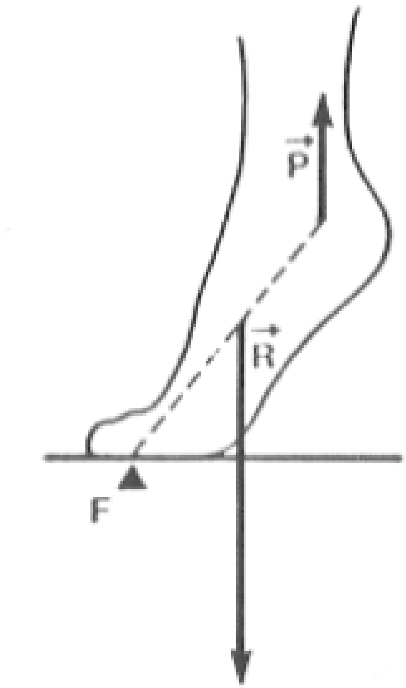
E' una leva svantaggiosa

La forza che deve essere esercitata dai muscoli splenici per tenere la testa in posizione eretta si ricava da:

$F_{splenici} \times 2\text{cm} = 80\ \text{N} \times 8\ \text{cm}$

$F_{splenici}$ = 320 N, corrispondente a una massa di circa 32 kg

LEVE DEL CORPO UMANO



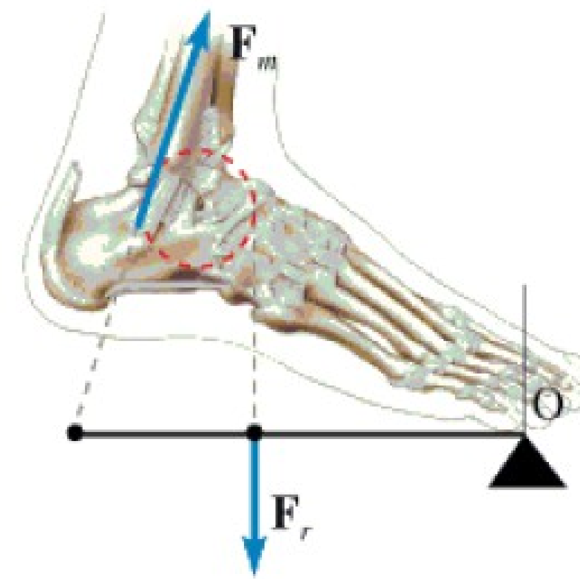
Articolazione del piede in elevazione sulle punte:

Leva di 2° genere, quindi vantaggiosa.

Fulcro = dita.

Resistenza = peso che grava sulla caviglia.

Potenza: muscoli del polpaccio, che esercitano una trazione sul tendine d'Achille.



LEVE DEL CORPO UMANO

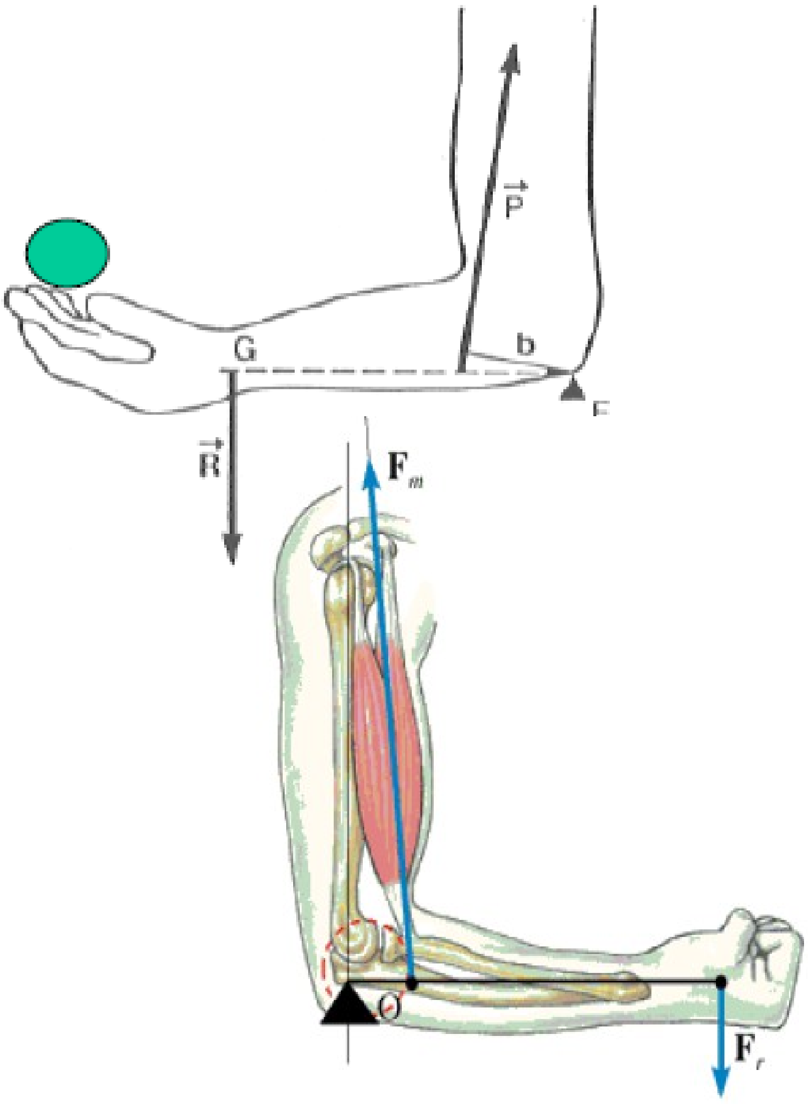
Articolazione del gomito:

Leva di 3° genere, quindi svantaggiosa.

Fulcro = articolazione.

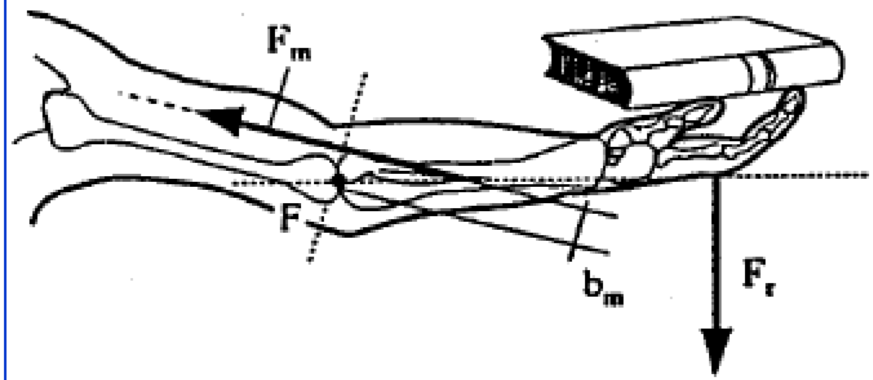
Resistenza = forza peso dell'avambraccio e dell'eventuale massa sostenuta dalla mano.

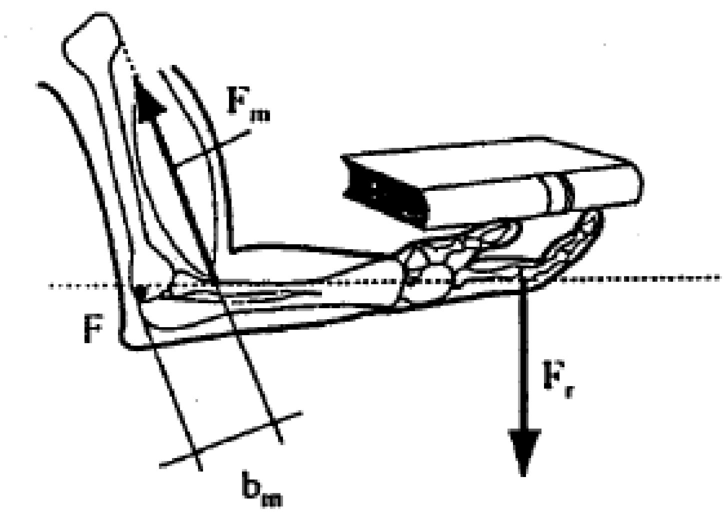
Potenza: Forza esercitata dal bicipite brachiale



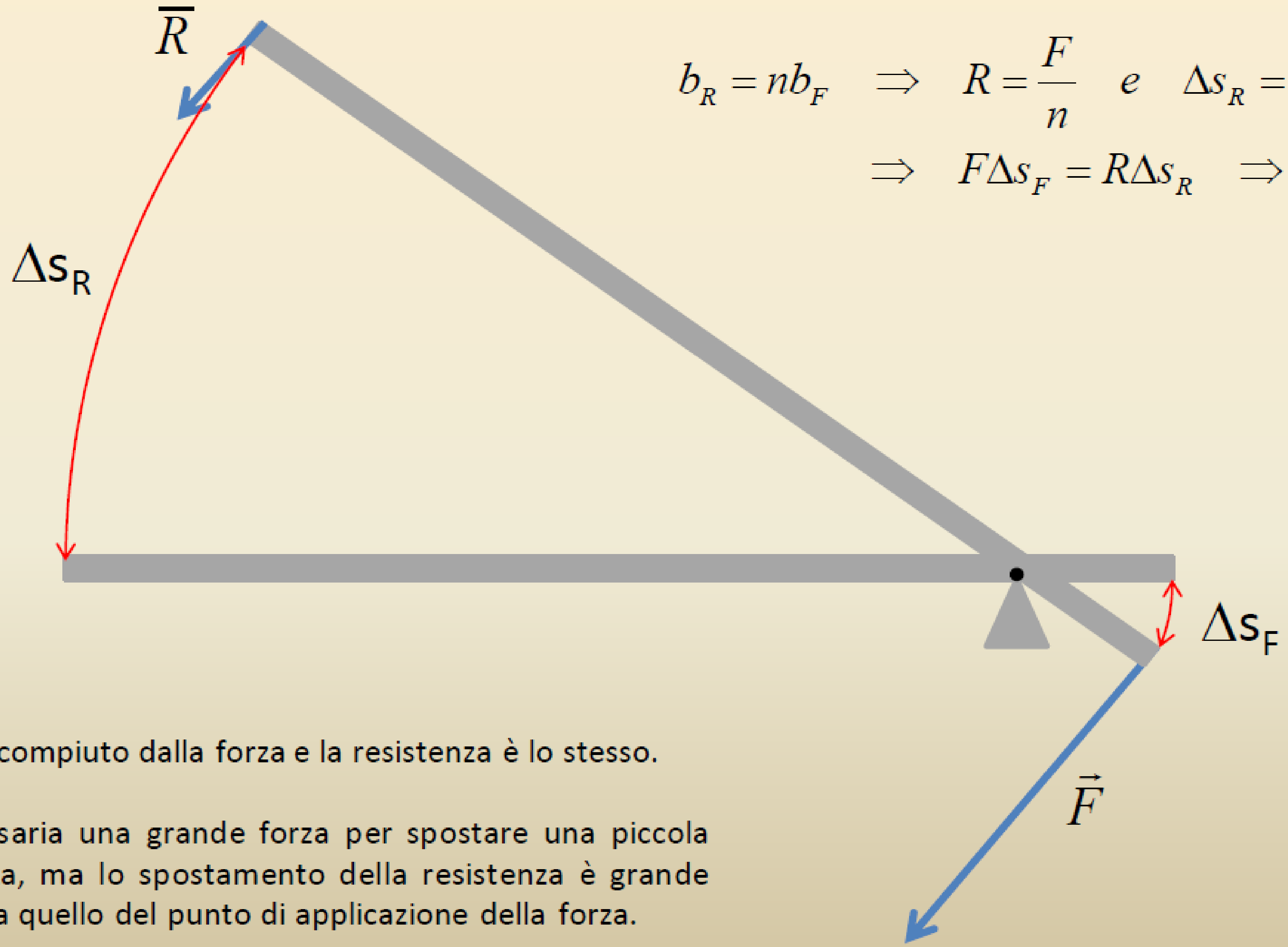
LEVE DEL CORPO UMANO

L'articolazione del gomito col braccio disteso e' piu' svantaggiosa dell'articolazione del gomito col braccio raccolto vicino al tronco poiche' in questo caso si puo' aumentare il braccio della potenza (b_m) e diminuire quello della resistenza.





LEVE DEL CORPO UMANO



$$b_R = n b_F \quad \Rightarrow \quad R = \frac{F}{n} \quad e \quad \Delta s_R = n \Delta s_F$$

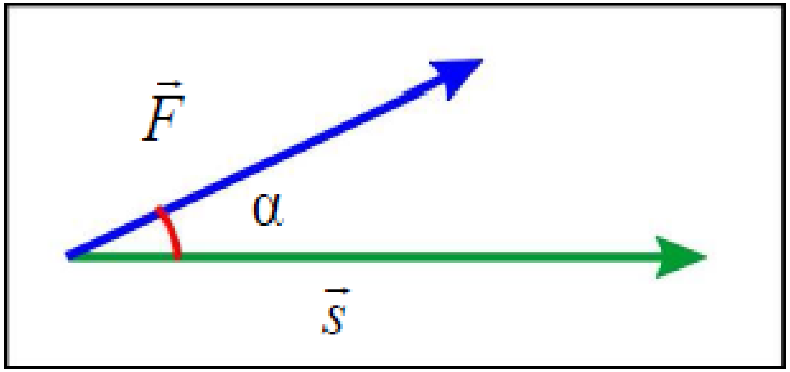
$$\Rightarrow \quad F \Delta s_F = R \Delta s_R \quad \Rightarrow \quad L_F = L_R$$

Il lavoro compiuto dalla forza e la resistenza è lo stesso.

E’ necessaria una grande forza per spostare una piccola resistenza, ma lo spostamento della resistenza è grande rispetto a quello del punto di applicazione della forza.

LAVORO

Se un corpo agisce una forza ***F***, il lavoro compiuto dalla forza per uno spostamento ***s*** è



$$L = \int F \cos\alpha \, ds = \int \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

se la forza è costante

$$L = F \cdot s \cdot \cos\alpha = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

IL LAVORO E' UNO SCALARE

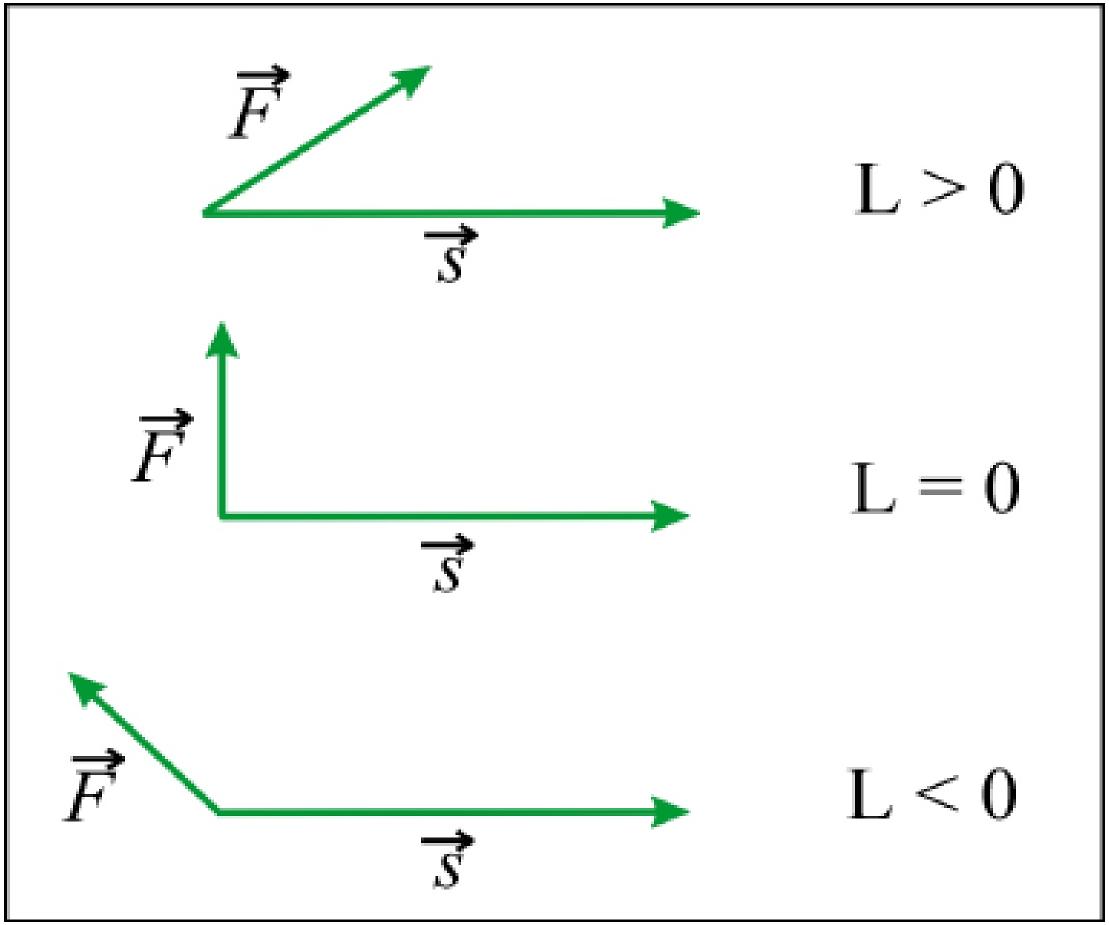
LAVORO

Il lavoro può essere

positivo

nullo

negativo



LAVORO

L'unità di misura del lavoro nel S.I. si chiama joule: lavoro compiuto dalla forza di 1 N che si sposta di 1 m parallelamente alla direzione della forza.

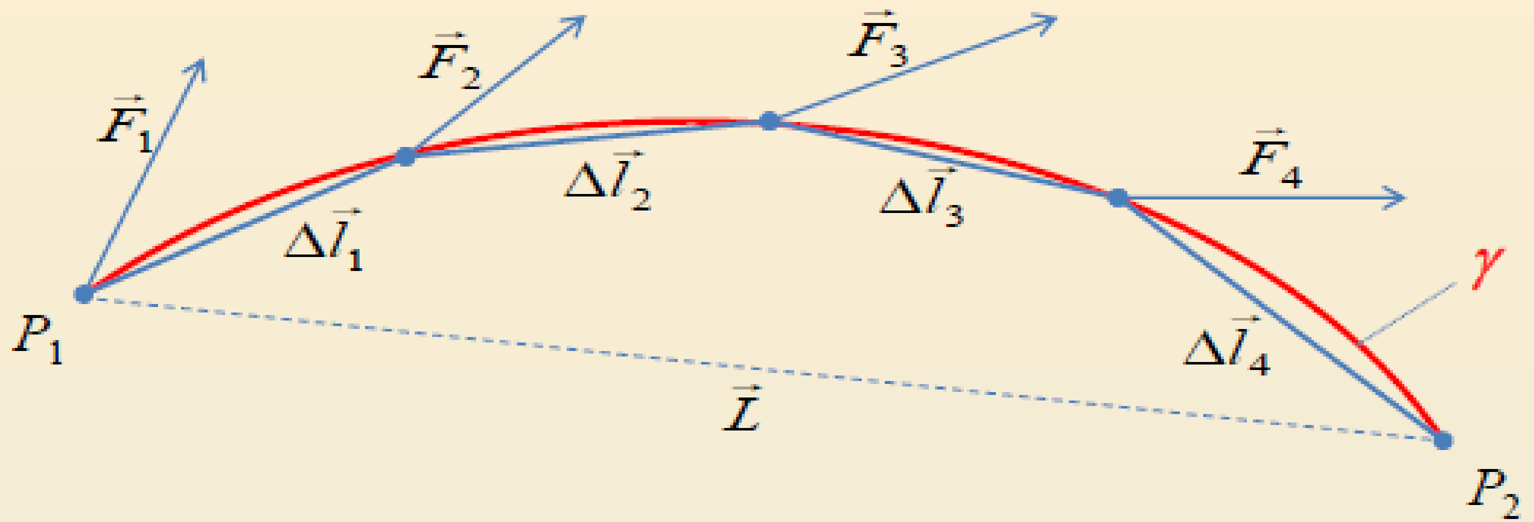
$$J = N \cdot m = kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$$

Nel sistema C.G.S. l'unità di lavoro si chiama erg.

$$erg = dyne \cdot cm = g \cdot cm^2 \cdot s^{-2}$$

$$joule = N \cdot m = 10^5\, dyne \cdot 10^2\, cm = 10^7\ erg$$

LAVORO



$$L_{P_1P_2,\gamma} = \lim_{\Delta l_i \to 0}\left(\vec{F}_1\cdot\Delta\vec{l}_1 + \vec{F}_2\cdot\Delta\vec{l}_2 + \vec{F}_3\cdot\Delta\vec{l}_3 + \cdots\right) = \int_{P_1,\gamma}^{P_2}\vec{F}\cdot d\vec{l}$$

Se la forza F agente su P è costante

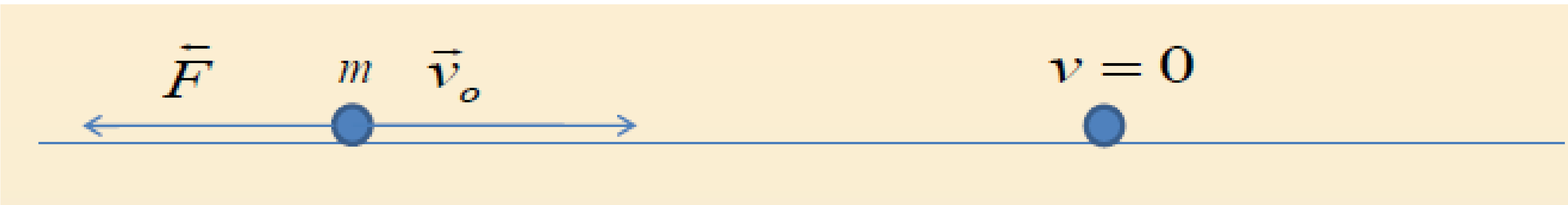
$$L = \int_{P_1,\gamma}^{P_2}\vec{F}\cdot d\vec{l} = \vec{F}\cdot\int_{P_1,\gamma}^{P_2}d\vec{l} = \vec{F}\cdot P_1P_2 = \vec{F}\cdot\vec{L}$$

Se la forza F agente su P è costante e parallela a L

$$L = \pm FL$$

ENERGIA CINETICA (1)

Applichiamo una forza per fermare un corpo in moto con velocità $\bar{v}_0$



$$a = F/m \qquad d_{arr} = \frac{v_0^2}{2a} \Longleftarrow L = -d_{arr}F = -\frac{v_0^2}{2a}F = -\frac{1}{2}mv_0^2$$

Il lavoro compiuto dal punto è quindi:

$$L = \frac{1}{2}mv_0^2$$

La capacità di compiere lavoro legata a massa e velocità viene chiamata

Energia Cinetica (E_c)

$$E_C = \frac{1}{2}mv^2$$

TEOREMA DELLE FORZE VIVE

Enunciato

La variazione di energia cinetica di un sistema materiale in un qualsiasi intervallo di tempo è pari al lavoro compiuto dalle forze agenti sul punto nello stesso intervallo di tempo.

$$\boxed{E_c(t_2) - E_c(t_1) = L_{t_1 t_2}}$$

In termini differenziali

$$\boxed{dE_C = dL}$$

ENERGIA CINETICA (2)

$$\boxed{L = \Delta T} = T_2 - T_1 = \frac{1}{2} m\, v_2^2 - \frac{1}{2} m\, v_1^2$$

verifica : moto rettilineo uniformemente accelerato

($\vec{a}$ = costante)

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} \qquad \Delta s = v_{media}\, \Delta t = \frac{(v_1 + v_2)}{2} \Delta t$$

$$L = \vec{F} \cdot \vec{\Delta} s = m\, a\, \Delta s = m \frac{(v_2 - v_1)(v_1 + v_2)\Delta t}{2\, \Delta t} = \frac{1}{2} m (v_2{}^2 - v_1{}^2) =$$

$$= \frac{1}{2} m\, v_2{}^2 - \frac{1}{2} m\, v_1{}^2 = T_2 - T_1 = \Delta T$$

Problema

Sempre una forza cambia la velocità del corpo alla quale è applicata?

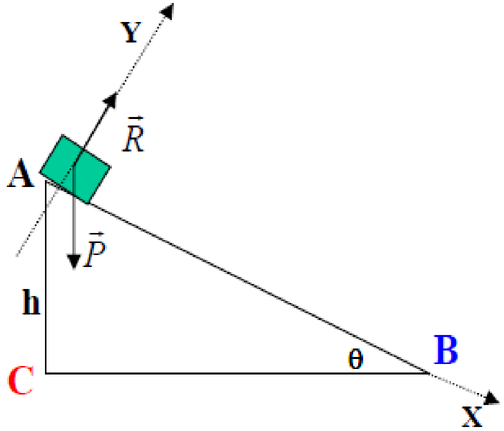
$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a}}$$ ⟹ sì

Sempre una forza cambia l'energia del corpo alla quale è applicata?

$$\boxed{L = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2}$$ ⟹ no

solo se L è diverso da zero

LAVORO: esempi



Vogliamo calcolare i moduli delle velocità, nel punto B e nel punto C, che avrà un corpo partito da fermo dal punto A, su di un piano inclinato alto h.

$$\vec{P} = \vec{F}_T$$

$$L = \int_A^C \vec{F}_T \cdot d\vec{s} = F_T \cdot AC \cdot \cos 0^o = mgh$$

$$L = \frac{1}{2}mv_C^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}mv_C^2$$

$$\frac{1}{2}mv_C^2 = mgh \quad \Rightarrow \quad v_C = \sqrt{2gh}$$

$$\vec{P} + \vec{R} = \vec{F}_T$$

$$\vec{P}(mg\sin\theta; -mg\cos\theta) \quad \vec{R}(0;R) \quad \vec{F}_T(F_T;0)$$

$$\begin{cases} mg\sin\theta + 0 = F_T \\ R - mg\cos\theta = 0 \end{cases}$$

$$L = \int_A^B \vec{F}_T \cdot d\vec{s} = F_T \cdot AB \cdot \cos 0^o = mg\sin\theta \frac{h}{\sin\theta}$$

$$L = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}mv_B^2$$

$$\frac{1}{2}mv_B^2 = mgh \quad \Rightarrow \quad v_B = \sqrt{2gh}$$

LE REAZIONI VINCOLARI NON FANNO LAVORO

POTENZA

La potenza è il rapporto fra il lavoro compiuto ed il tempo impiegato.

$$P = \frac{L}{t} = \frac{Fs\cos\alpha}{t} = Fv\cos\alpha = \vec{F}\cdot\vec{v}$$

POTENZA

L'unità di misura della potenza nel S.I. si chiama watt.

$$watt = W = \frac{joule}{s} = J \cdot s^{-1}$$

Il **kilowattora (kWh)** è una unità pratica di energia (e non di potenza !), pari all'energia erogata da una macchina della potenza di 1 kW in 1 ora.

$$kWh = 1000 \cdot 1 Js^{-1} \cdot 3600\,\mathrm{s} = 3.6\,\mathrm{MJ}$$

FORZE CONSERVATIVE

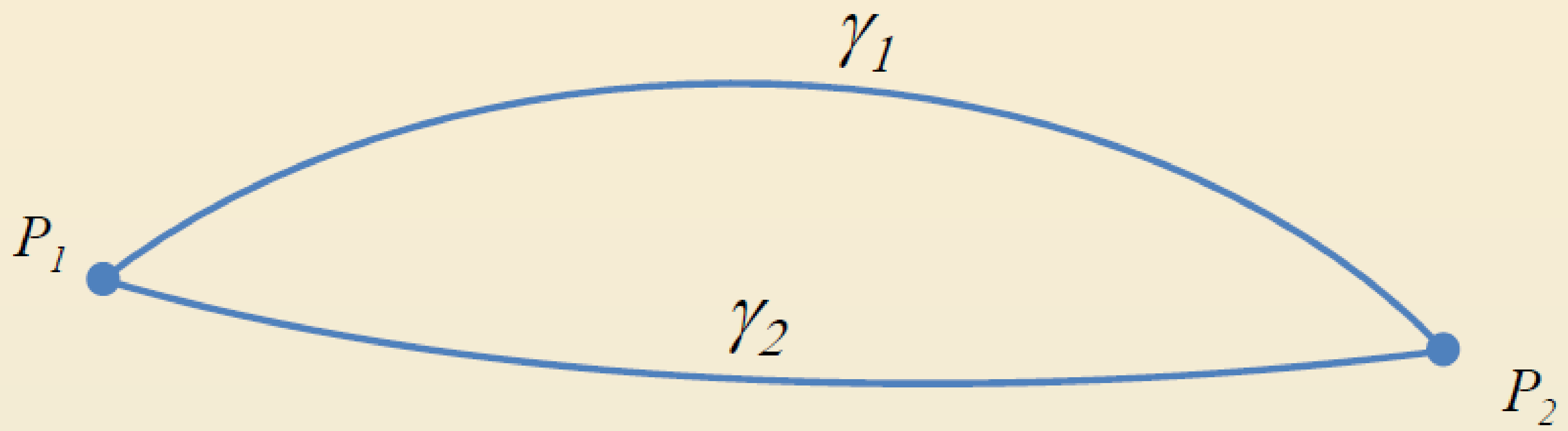
Forza conservativa: il lavoro compiuto da una forza conservativa non dipende dal percorso seguito, ma dipende dal punto di partenza e punto di arrivo.

$$L = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = U(A, B)$$

La funzione U ha le dimensioni di un lavoro, cioè di una energia ed è detta

ENERGIA POTENZIALE

FORZE CONSERVATIVE



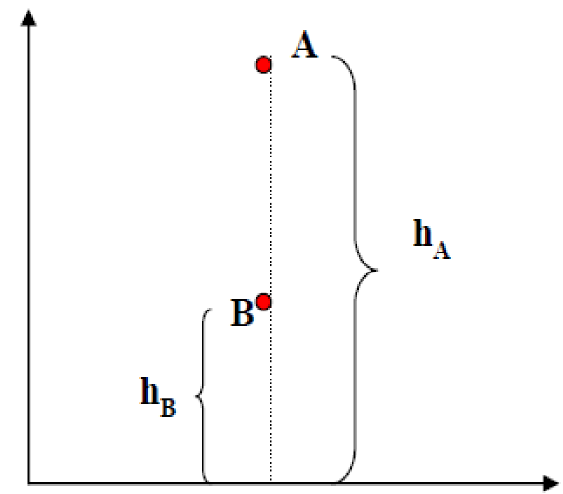
$$L_{P_1P_2} = \int_{P_1,\gamma}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{l} = E_P(P_1) - E_P(P_2)$$

$$dL = -dE_p$$

$$\int_{P_1}^{P_2} dL = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{l} = L_{P_1P_2}$$

$$\int_{P_1}^{p_2} dE_P = E_P(P_2) - E_P(P_1)$$

FORZE CONSERVATIVE: esempio



Un corpo cade sotto l'azione del suo peso dall'altezza h_A e raggiunge l'altezza h_B: quant'è il lavoro della forza peso?

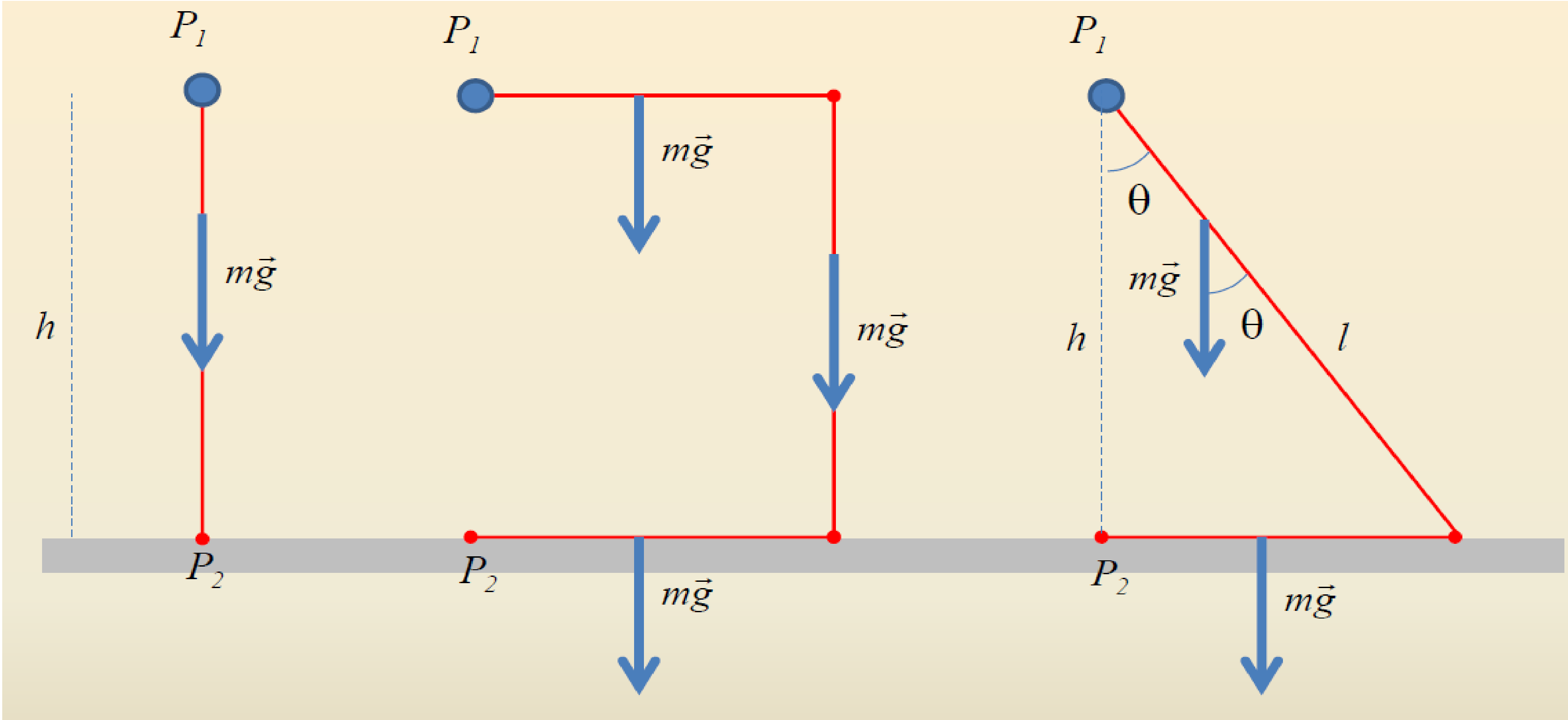
$$L = \int_{h_A}^{h_B} \vec{F} \cdot d\vec{s} = -mg(h_B - h_A) = -(mgh_B - mgh_A)$$

$$U = mgh$$

Energia potenziale della forza peso

$$L = -(U_{finale} - U_{iniziale}) = -\Delta U$$

FORZE CONSERVATIVE: esempio

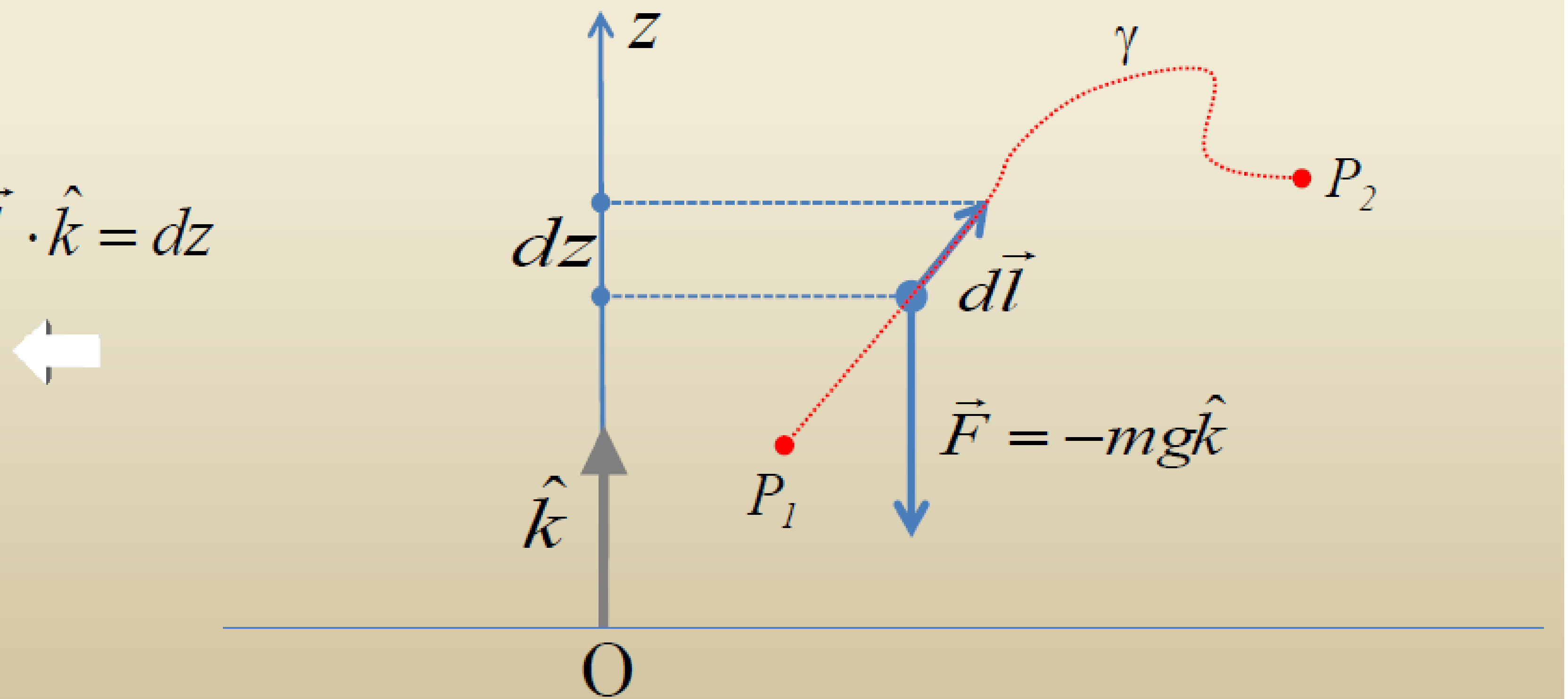


$$L_{P_1P_2} = mgh \qquad L_{P_1P_2} = 0 + mgh + 0 = mgh \qquad L_{P_1P_2} = 0 + mgl\cos\theta = mgh$$

$\boxed{E_p = mgh}$ risulta infatti $L_{P_1P_2} = E_p(P_1) - E_p(P_2) = mgh - 0 = mgh$

FORZE CONSERVATIVE: esempio

$$d\vec{l} \cdot \hat{k} = dz$$



$$E_P(x,y,z) = -\int_{P_0}^{P} \vec{F} \cdot d\vec{l} + E_P(x_0,y_0,z_0) = -(mgz_0 - mgz) + E_p(\text{O}) = mgz$$

$$P_0 \equiv \text{O}; \quad x_0 = y_0 = z_0 = 0 \quad E_P(P_0) = E_P(\text{O}) = 0$$

FORZE CONSERVATIVE: esempio

Un corpo di massa m_1 si muove, dal punto A al punto B, sotto l'azione dell'attrazione gravitazionale di un corpo di massa m_2: quant'è il lavoro della forza gravitazionale?

$$L = \int_{r_A}^{r_B} G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \cdot d\vec{r} = -G\frac{m_1 m_2}{r_B} + G\frac{m_1 m_2}{r_A} = -\left(G\frac{m_1 m_2}{r_B} - G\frac{m_1 m_2}{r_A} \right)$$

$$L = -\left(U_{finale} - U_{iniziale}\right) = -\Delta U \qquad U = -G\frac{m_1 m_2}{r}$$

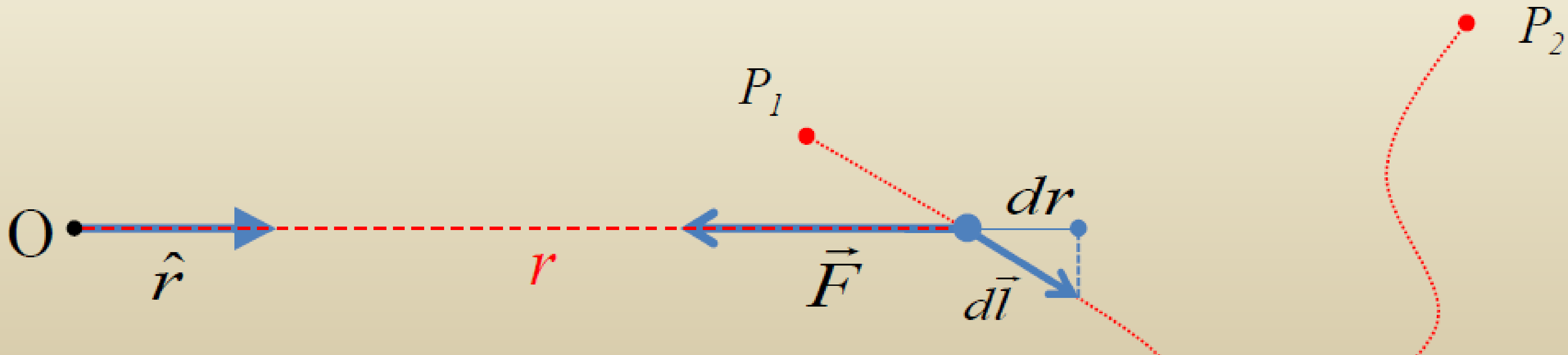
Campo di forze attrattivo

⇕

Energia potenziale negativa

Energia potenziale della forza gravitazionale

FORZE CONSERVATIVE: esempio



$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\hat{r} \qquad d\vec{l}\cdot\hat{r} = dr$$

$$E_P(x,y,z) = -\int_{P_0}^{P}\vec{F}\cdot d\vec{l} + E_P(x_0,y_0,z_0) = -\left(G\frac{mM}{r} - G\frac{mM}{r_0}\right) + E_p(\infty) = -G\frac{mM}{r}$$

$$P_0 \equiv P_\infty; \quad r_0 = \infty \qquad E_P(P_0) = E_P(\infty) = 0$$

FORZE CONSERVATIVE: esempio

Una molla ideale di costante elastica k, sposta un corpo dal punto A al punto B: quant'è il lavoro della forza elastica ?

$$L = \int_{x_A}^{x_B} -kx\,dx = -\frac{1}{2}kx_B^2 + \frac{1}{2}kx_A^2 = -\left(\frac{1}{2}kx_B^2 - \frac{1}{2}kx_A^2\right)$$

$$L = -\left(U_{finale} - U_{iniziale}\right) = -\Delta U$$

Energia potenziale della forza elastica $\Rightarrow$ $U = \frac{1}{2}kx^2$

CONSERVAZIONE DELL'**ENERGIA TOTALE MECCANICA**

Per una forza conservativa che compie un lavoro per andare da A a B, valgono contemporaneamente

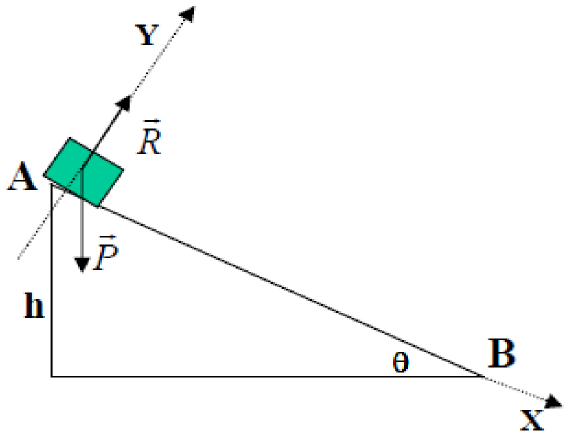
$$L = \Delta T = \left(T_B - T_A\right) \quad \text{e} \quad L = -\Delta U = -(U_B - U_A)$$

$$\left(T_B - T_A\right) = -(U_B - U_A)$$

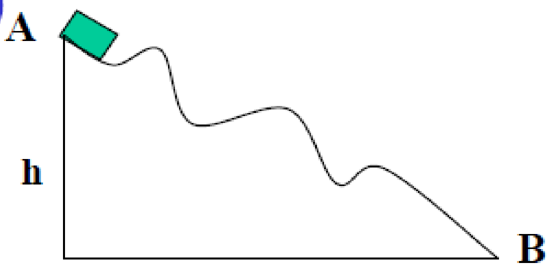
$$T_A + U_A = T_B + U_B$$

ESEMPI (1)

1



2

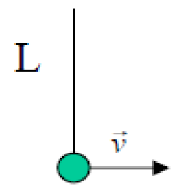


Vogliamo calcolare i moduli delle velocità, nel punto B, che avrà un corpo partito da fermo dal punto A, nel primo e nel secondo caso.
In entrambi casi le forze che agiscono sul corpo sono la forza peso e la reazione vincolare.
Quest'ultima non compie lavoro, essendo sempre ortogonale al vincolo sul quale il corpo scorre, quindi non può cambiare l'energia del corpo, ma solamente la sua traettoria.
Dal punto di vista energetico agisce solo la forza peso, che è conservativa, quindi

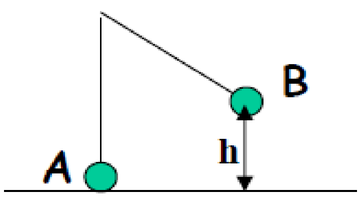
$$T_A + U_A = T_B + U_B \quad \Rightarrow \quad 0 + mgh = \frac{1}{2} m v_B^2 + 0 \quad \Rightarrow \quad v_B = \sqrt{2gh}$$

ESEMPI (2)

$L = 1\,\mathrm{m} \qquad |\vec{v}| = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$



Consideriamo il pendolo di figura composto da un filo inestensibile lungo L ed una massa m. Forniamo alla massa una velocità v e ci domandiamo quale è l'altezza massima alla quale il pendolo risale.



Le forze che agiscono sul corpo sono la forza peso e la reazione vincolare del filo. Quest'ultima non compie lavoro e quindi non può cambiare l'energia del corpo, ma solamente la sua traettoria. Dal punto di vista energetico agisce solo la forza peso, che è conservativa.

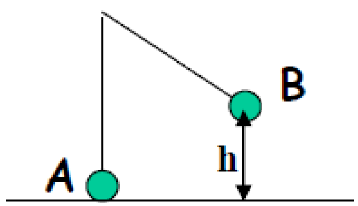
$$T_A + U_A = T_B + U_B \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv^2 + 0 = 0 + mgh \quad \Rightarrow \quad h = \frac{v^2}{2g}$$

$$h \approx \frac{100\,m^2 s^{-2}}{20\,ms^{-2}} = 5\,m$$

Risultato senza senso!!!

ESEMPI (2) cont.

$L = 1\,m \qquad |\vec{v}| = 10\,m\,s^{-1}$



Ci sono due possibilità:

- non è valida la conservazione dell'energia totale meccanica;
- è valida, ma è stata applicata male.

$$T_A + U_A = T_B + U_B \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv^2 + 0 = 0 + mgh$$

$$E_{TOT} = T_A = \frac{1}{2}mv^2 = 50m \;\; J$$

$$U_{MAX} = mg2L \approx 20m \;\; J$$

Il corpo è fermo

Il corpo si trova sul piano di riferimento dal quale si misurano le altezze

$E_{TOT} > U_{MAX}$ il pendolo non si ferma mai!

ESEMPI (3)

$h_A > h_B$

Consideriamo il profilo di figura in campo gravitazionale. Trascurando tutti gli attriti, calcolare il modulo della velocità che bisogna imprimere alla sfera nel punto A, affinché arrivi ferma nel punto B.

Le forze che agiscono sul corpo sono la forza peso e la reazione vincolare del profilo. Quest'ultima non compie lavoro e quindi non può cambiare l'energia del corpo, ma solamente la sua traettoria. Dal punto di vista energetico agisce solo la forza peso, che è conservativa.

$$T_A + U_A = T_B + U_B \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} m v_A^2 + m g h_A = 0 + m g h_B$$

$$v_A = \sqrt{2g\left(h_B - h_A\right)}$$

Il modulo della velocità un numero immaginario?

Risultato assurdo!

ESEMPI (3) cont.

$h_A > h_B$

Ci sono due possibilità:

- non è valida la conservazione dell'energia totale meccanica;
- è valida, ma è stata applicata male.

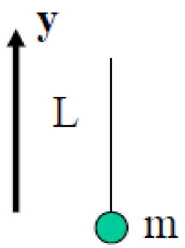
$$T_A + U_A = T_B + U_B$$

T_B non può essere nulla perché

$$T_B = U_A - U_B$$

L'energia cinetica in A al minimo può essere zero, ma deve valere contemporaneamente che $U_A > U_B$ e l'energia totale meccanica si deve conservare.

ESEMPI (4)



Consideriamo il pendolo di figura composto da un filo inestensibile lungo L ed una massa m. Calcolare la tensione del filo.

Le forze che agiscono sul corpo sono la forza peso P e la tensione del filo T e poiché il corpo si trova in equilibrio, possiamo scrivere

$$\vec{P} + \vec{T} = 0$$

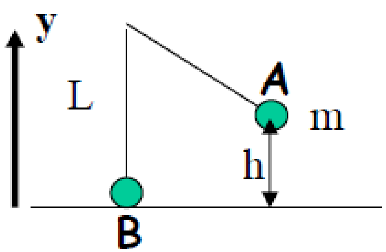
quindi

$$-mg + T = 0$$

da cui

$$T = mg$$

ESEMPI (5)



Consideriamo il pendolo di figura composto da un filo inestensibile lungo L ed una massa m. Facciamo partire, da fermo, la massa m da un'altezza h (punto A). Quanto vale la tensione T del filo nel punto B?

Nel punto B le forze che agiscono sul corpo sono la forza peso P e la tensione del filo T e poiché il corpo percorre una traiettoria circolare, possiamo scrivere

$$\vec{P} + \vec{T} = \vec{F}_{centripeta}$$

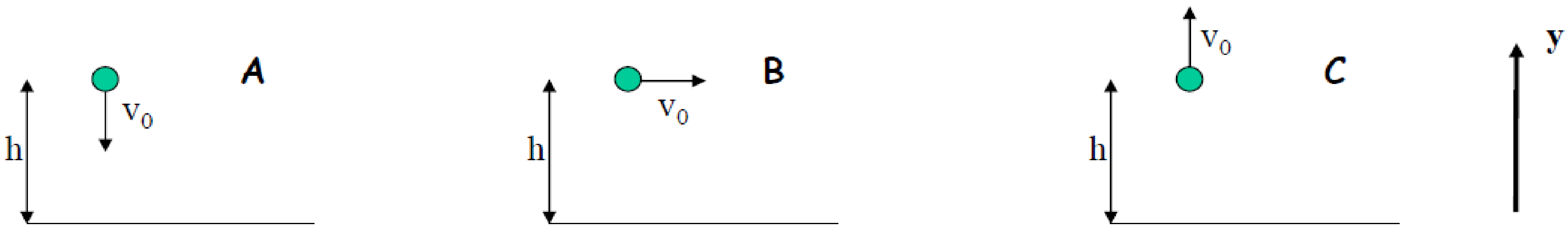
Per la conservazione dell'energia totale meccanica avremo

$$E_B = E_A \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv^2 = mgh \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2gh}$$

quindi

$$-mg + T = m\frac{v^2}{L} \quad \Longrightarrow \quad T = mg\left(1 + \frac{2h}{L}\right)$$

ESEMPI (6)



Consideriamo le tre masse identiche di figura: calcolarne i moduli delle velocità quando toccano il suolo ed i tempi di caduta.
L'unica forza agente in tutti e tre i casi è la forza peso e quindi per la conservazione dell'energia totale meccanica

$$\frac{1}{2}mv_{A,B,C}^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh \quad \Rightarrow \quad v_{A,B,C} = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$$

Le tre masse si muovono di moto uniformemente accelerato e quindi

$$y_A = -\frac{1}{2}gt_A^2 - v_0 t_A + h$$
$$y_B = -\frac{1}{2}gt_B^2 + h$$
$$y_C = -\frac{1}{2}gt_C^2 + v_0 t_C + h$$

$$t_A = \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 + 2gh}}{-g}$$
$$t_B = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$
$$t_C = \frac{-v_0 - \sqrt{v_0^2 + 2gh}}{-g}$$

ESEMPI (7)

Consideriamo il corpo di massa m, connesso ad una molla ideale, di costante elastica k. Supponiamo che all'inizio (t=0) valgano le condizioni al contorno: $x(0)=-L$ $v(0)=0$: calcolare il modulo della velocità del corpo nel punto $x=0$.
Sul corpo agiscono la forza peso, la reazione vincolare del piano di appoggio e la forza della molla.
La somma della forza peso e della reazione vincolare è zero, perché il corpo si muove sul piano di appoggio.
Quindi la forza risultante è quella della molla ed essendo conservativa possiamo scrivere

$$T_{x=-L} + U_{x=-L} = T_{x=0} + U_{x=0}$$

$$0 + \frac{1}{2}kL^2 = \frac{1}{2}mv^2 + 0$$

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}}L$$