Università degli Studi di Perugia
Facoltà di Medicina e Chirurgia

Fisica

Leonello Servoli

Leonello.servoli@pg.infn.it

Tel.: 0039-348-3345847

http://www.fisica.unipg.it/~servoli

Orario

21 ottobre	15-18	3
23 ottobre	15-18	4
27 ottobre	15-18	5
30 ottobre	15-18	6
10 novembre	15-18	7
11 novembre	15-18	8
13 novembre	15-18	9

IMPULSO E QUANTITA' DI MOTO

Si definisce **impulso** di una forza

$$\vec{I} = \vec{F} \cdot \Delta t$$

dove Δt è il tempo durante il quale la forza agisce

$$[I] = N \cdot T = M \cdot L \cdot T^{-2} \cdot \mathrm{T} = M \cdot L \cdot T^{-1} \quad \Rightarrow \quad \{\mathrm{mks}\}\ \mathrm{Kg\ m\ s^{-1}}$$

Si definisce quantità di moto

$$\vec{Q} = m\vec{v}$$

$$[Q] = M \cdot L \cdot T^{-1} \quad \Rightarrow \quad \{\mathrm{mks}\}\ \mathrm{Kg\ m\ s^{-1}}$$

L'impulso e la quantità di moto sono VETTORI

TEOREMA DELL'IMPULSO

L'impulso di una forza è eguale alla variazione della quantità di moto del corpo sul quale la forza agisce

$$\boxed{\vec{I} = \vec{F} \cdot \Delta t = \vec{Q}_2 - \vec{Q}_1}$$

$$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{Q}}{\Delta t}$$

TEOREMA DELL'IMPULSO

L'impulso di una forza è eguale alla variazione della quantità di moto del corpo sul quale la forza agisce

$$\boxed{\vec{I} = \vec{F} \cdot \Delta t = \vec{Q}_2 - \vec{Q}_1 = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1}$$

$$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{Q}}{\Delta t} = \frac{m \Delta \vec{v}}{\Delta t} = m\vec{a};$$ **2° Principio della Dinamica**

CONSERVAZIONE DELLA QUANTITA' DI MOTO

Poiché per il III° Principio della Dinamica vale che

$$\sum \vec{F}_{\text{int}} = 0$$

Se vale anche

$$\sum \vec{F}_{ext} = 0$$

avremo

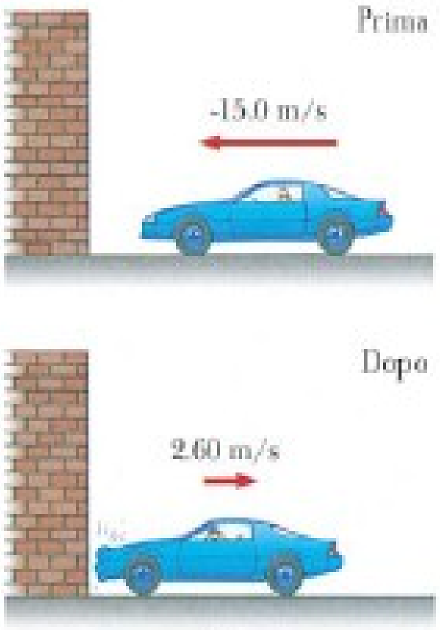
$$\boxed{\sum \vec{F}_{ext} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum \vec{I} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum \Delta \vec{Q} = 0}$$

In un sistema isolato la quantità di moto si conserva

In un test d'urto, un'auto di massa **m=1500 kg** urta contro un muro.

La velocità iniziale è $\mathbf{v_i} = -15.0\ \mathbf{i}$ m/s e quella finale è $\mathbf{v_f} = 2.60\ \mathbf{i}$ m/s.

Se la durata dell'urto è 0.150 s, determinare l'impulso dovuto all'urto e la forza media esercitata sull'auto.



(a)

(b)

$$\vec{p}_i = m\vec{v}_i = (1500\,kg)(-15.0\,m/s)\vec{i} = -2.25\ 10^4\ \vec{i}\ kg\,m/s$$

$$\vec{p}_f = m\vec{v}_f = (1500\,kg)(2.6\,m/s)\vec{i} = 0.39\,10^4\ \vec{i}\ kg\,m/s$$

$$I = \Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = (0.39\,10^4\ \vec{i}\ kg\,m/s) - (-2.25\ 10^4\ \vec{i}\ kg\,m/s)$$
$$= 2.64\,10^4\ \vec{i}\ kg\,m/s$$

Forza media esercitata sull'auto:

$$\overline{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \frac{2.64\cdot 10^4\ \vec{i}\ kg\ m/s}{0.150\,s} = 1.76\,10^5\ \vec{i}\ N$$

Stesso principio per gli atleti che saltando atterrano piegando le ginocchia!!!!

Calcolare l'impulso che si esercita su una persona che pesa 70 kg quando atterra da un'altezza di 3.0 m.
Stimare la forza media esercitata dal terreno nel caso che:
a) arrivi a terra con le gambe tese (moto del corpo 1.0 cm)
b) arrivi a terra con le gambe piegate (moto del corpo 50 cm)

Svolgimento:

A) conservazione energia meccanica: $\frac{1}{2} mV^2 + 0 = -mg(y-y_0)$

$V = 7.7$ m/s

$F\Delta t = \Delta p = p - y_0 = 0 - m\,V = -540\ N\,s$

a) decelerazione in 1.0 cm: $V_{media} = (7.7 + 0) / 2 = 3.8\ m/s$;

Tempo dell'urto: $\Delta t = d/V_{media} = 2.6\ ms$;

Forza totale media => $F = 540/0.0026\ N = 2.1 \times 10^5\ N$;

Forza verso l'alto = $F - mg = 2.1 \times 10^5 + 0.0069\ 10^5\ N$;

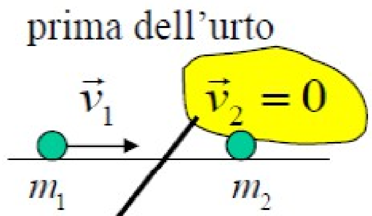
b) decelerazione in 50.0 cm: $V_{media} = (7.7 + 0) / 2 = 3.8\ m/s$;

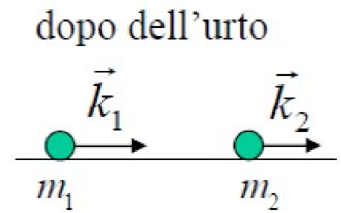
Tempo dell'urto: $\Delta t = d/V_{media} = 130\ ms$;

Forza totale media => $F = 540/0.130\ N = 4.2 \times 10^3\ N$;

Forza verso l'alto = $4.2 \times 10^3 + 0.69\ 10^3\ N = 4.9 \times 10^3$

URTI





Posso sempre mettermi nel sistema di riferimento inerziale nel quale m_2 è fermo senza alterare l'aspetto del fenomeno.

Le forze che agiscono sul sistema sono la forza peso e la reazione vincolare del piano, quindi il sistema è isolato e la quantità di moto totale si conserva.
Si dicono urti elastici quelli dove si conserva anche l'energia cinetica.

$$\text{Urto elastico} \quad \Rightarrow \quad \text{si conservano } T \text{ e } \vec{Q}$$

$$\text{Urto anelastico} \quad \Rightarrow \quad \text{si conserva } \vec{Q}$$

URTO ELASTICO CENTRALE

Consideriamo un urto elastico centrale (unidimensionale), possiamo scrivere

$$\begin{cases} \frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{1}{2}m_1k_1^2 + \frac{1}{2}m_2k_2^2 \\ m_1v_1 = m_1k_1 + m_2k_2 \end{cases}$$

Conservazione dell'energia cinetica

Conservazione della quantità di moto (abbiamo tolto il segno di vettore perché siamo in una dimensione)

URTO ELASTICO CENTRALE cont.

Possiamo scrivere

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{1}{2}m_1k_1^2 + \frac{1}{2}m_2k_2^2$$

$$k_1 = \frac{m_1v_1 - m_2k_2}{m_1} \Longrightarrow k_1 = v_1 - \frac{m_2}{m_1}k_2$$

sostituiamo k_1 nella prima equazione, avremo

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{1}{2}m_1\frac{(m_1v_1 - m_2k_2)^2}{m_1^2} + \frac{1}{2}m_2k_2^2$$

moltiplichiamo per 2 e sviluppiamo il quadrato, avremo

$$m_1v_1^2 = \frac{m_1^2v_1^2 + m_2^2k_2^2 - 2m_1m_2v_1k_2}{m_1} + m_2k_2^2$$

moltiplichiamo per m_1

$$m_1^2v_1^2 = m_1^2v_1^2 + m_2^2k_2^2 - 2m_1m_2v_1k_2 + m_1m_2k_2^2$$

URTO ELASTICO CENTRALE cont.

$$\cancel{m_1^2 v_1^2} = \cancel{m_1^2 v_1^2} + m_2^2 k_2^2 - 2m_1 m_2 v_1 k_2 + m_1 m_2 k_2^2$$

Si avrà

$$m_2^2 k_2^2 - 2m_1 m_2 v_1 k_2 + m_1 m_2 k_2^2 = 0$$

Raggruppiamo i termini simili in k_2

$$\left(m_2^2 + m_1 m_2\right) k_2^2 - 2m_1 m_2 v_1 k_2 = 0$$

$$\boxed{k_1 = v_1 - \frac{m_2}{m_1} k_2}$$

dividiamo per m_2

$$\left(m_2 + m_1\right) k_2^2 - 2m_1 v_1 k_2 = 0 \quad \longrightarrow \quad \left[\left(m_1 + m_2\right) k_2 - 2m_1 v_1\right] k_2 = 0$$

Questa è una equazione di secondo grado pura che ammette due soluzioni

$$k_2 = 0 \quad \longrightarrow \quad k_1 = v_1$$

Non c'è stato l'urto

$$k_2 = \frac{2m_1 v_1}{\left(m_1 + m_2\right)}$$

URTO ELASTICO CENTRALE cont.

Calcoliamo esplicitamente k_1, conoscendo k_2

$$k_1 = v_1 - \frac{m_2}{m_1} k_2 \qquad\qquad k_2 = \frac{2m_1 v_1}{(m_1 + m_2)}$$

avremo

$$k_1 = v_1 - \frac{m_2}{\cancel{m_1}} \frac{2\cancel{m_1} v_1}{(m_1 + m_2)} = v_1 - \frac{2m_2 v_1}{(m_1 + m_2)} = \frac{(m_1 + m_2)v_1 - 2m_2 v_1}{(m_1 + m_2)} =$$

$$= \frac{m_1 v_1 + m_2 v_1 - 2m_2 v_1}{(m_1 + m_2)} = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_1}{(m_1 + m_2)} = \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} v_1$$

URTO ELASTICO CENTRALE

In conclusione

$$k_1 = \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} v_1$$

$$k_2 = \frac{2m_1}{(m_1 + m_2)} v_1$$

Masse eguali: $m_1 = m_2 = m$

$$k_1 = \frac{(m - m)}{(m + m)} v_1 = 0 \qquad k_2 = \frac{2m}{(m + m)} v_1 = v_1$$

il proiettile ed il bersaglio si scambiano le velocità

Masse diverse: $m_1 > m_2$

$$k_1 = \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} v_1 \qquad k_2 = \frac{2m_1}{(m_1 + m_2)} v_1$$

k_1 ha lo stesso verso di v_1
k_2 ha lo stesso verso di v_1

Masse diverse: $m_1 < m_2$

$$k_1 = \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} v_1 \qquad k_2 = \frac{2m_1}{(m_1 + m_2)} v_1$$

k_1 ha verso opposto a quello di v_1
k_2 ha lo stesso verso di v_1

URTO COMPLETAMENTE ANELASTICO

Consideriamo un urto completamente anelastico, possiamo scrivere la conservazione della quantità di moto

$$m_1\vec{v}_1 = (m_1 + m_2)\vec{k}$$

Da questa equazione possiamo dedurre che la velocità dopo l'urto ha la stessa direzione e verso della velocità prima dell'urto.
Per il modulo avremo

$$k = \frac{m_1 v_1}{(m_1 + m_2)} = \frac{m_1}{(m_1 + m_2)} v_1$$

Masse eguali: $m_1 = m_2 = m$

$$k = \frac{m}{(m + m)} v_1 = \frac{m}{2m} v_1 = \frac{v_1}{2}$$

il corpo di massa 2m si muove, dopo l'urto, con una velocità dimezzata rispetto a v_1

Un pendolo è formato da una asticella rigida di lunghezza **L** e massa trascurabile, e da una sferetta di massa $\mathbf{M_1}$ e dimensione trascurabile fissata all'estremità. Il pendolo viene lasciato libero di muoversi partendo dalla posizione ad angolo retto rispetto alla verticale. Quando arriva alla posizione coincidente con la verticale, la sferetta urta contro un cubo di massa $\mathbf{M_2}$ posta in quiete su di un piano orizzontale che comincia a muoversi con una velocità **V**. Il cubo si muove su di un piano con attrito, e si ferma dopo una distanza **D**. Calcolare:

1) la lunghezza dell'asticella rigida;

2) il coefficiente di attrito dinamico tra cubetto e piano.

Dati del problema:

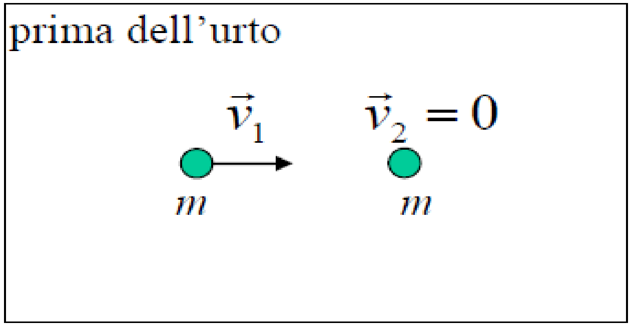
$\mathbf{M_1}$ = 1.0 kg;

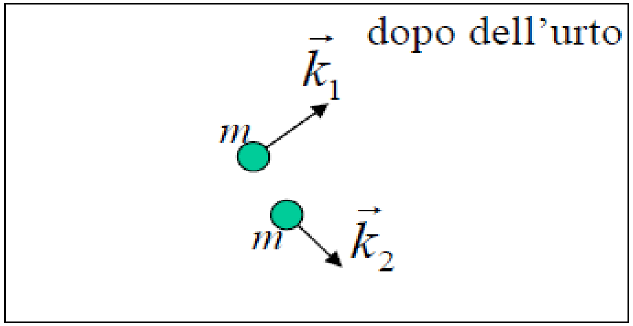
$\mathbf{M_2}$ = 1.0 kg;

V = 2.0 m/s;

D = 20 cm;

URTO ELASTICO NON CENTRALE





Vista dall'alto

Consideriamo un urto elastico non centrale (bidimensionale) fra masse eguali, calcolare l'angolo α fra i due vettori velocità dopo l'urto. Possiamo scrivere

$$\begin{cases} \frac{1}{2} m\ v_1^2 = \frac{1}{2} m\ k_1^2 + \frac{1}{2} m\ k_2^2 & \text{Conservazione dell'energia cinetica} \\ m\ \vec{v}_1 = m\ \vec{k}_1 + m\ \vec{k}_2 & \text{Conservazione della quantità di moto} \end{cases}$$

URTO ELASTICO NON CENTRALE cont.

Quindi devono valere contemporaneamente le due equazioni

$$\frac{1}{2}m\,v_1^2 = \frac{1}{2}m\,k_1^2 + \frac{1}{2}m\,k_2^2 \qquad\qquad m\,\vec{v}_1 = m\,\vec{k}_1 + m\,\vec{k}_2$$

moltiplichiamo per 2 la prima e dividiamo entrambe per m, avremo

$$v_1^2 = k_1^2 + k_2^2 \qquad\qquad \vec{v}_1 = \vec{k}_1 + \vec{k}_2$$

Facciamo il quadrato della seconda equazione, avremo

$$v_1^2 = \left(\vec{k}_1 + \vec{k}_2\right)^2 = k_1^2 + k_2^2 + 2\vec{k}_1\cdot\vec{k}_2 = k_1^2 + k_2^2 + 2k_1k_2\cos\alpha$$

Dunque deve valere contemporaneamente

$$v_1^2 = k_1^2 + k_2^2$$

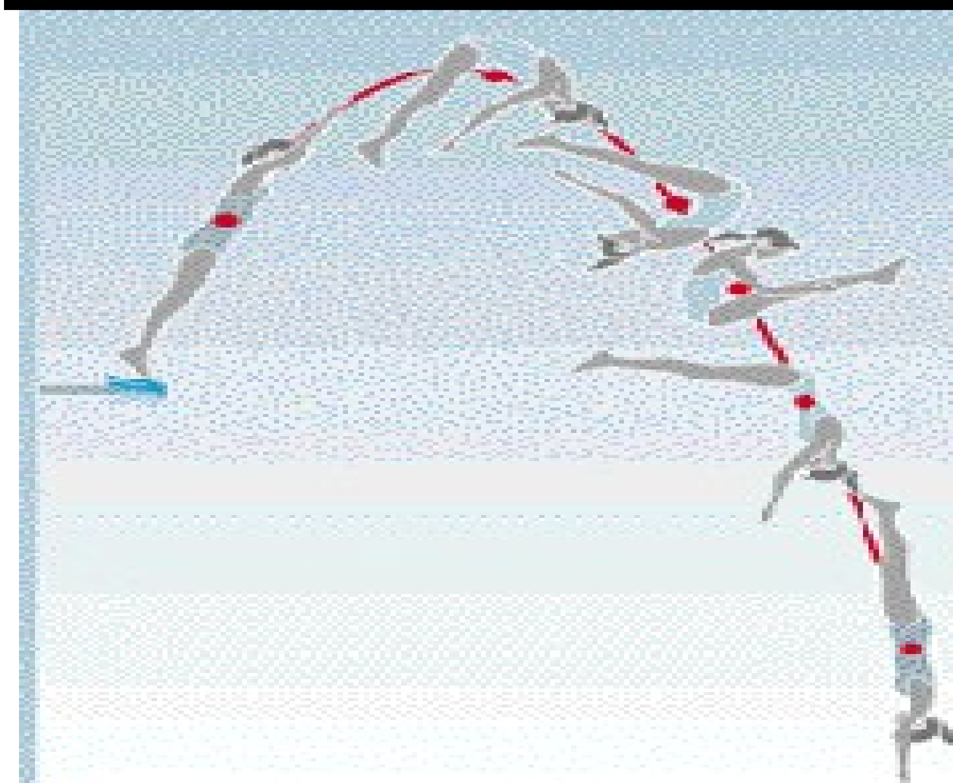
$$v_1^2 = k_1^2 + k_2^2 + 2k_1k_2\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \quad \cos\alpha = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha = 90^o$$

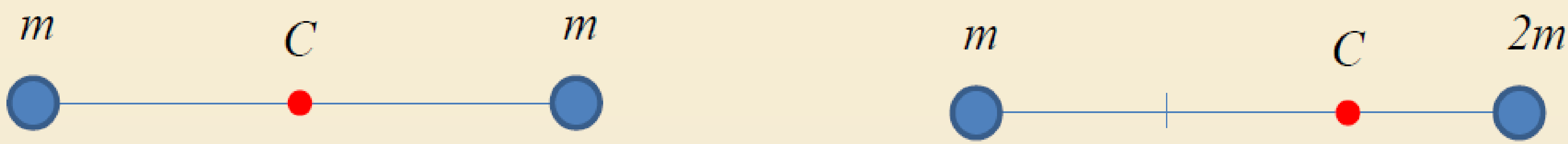
Centro di massa di un sistema materiale

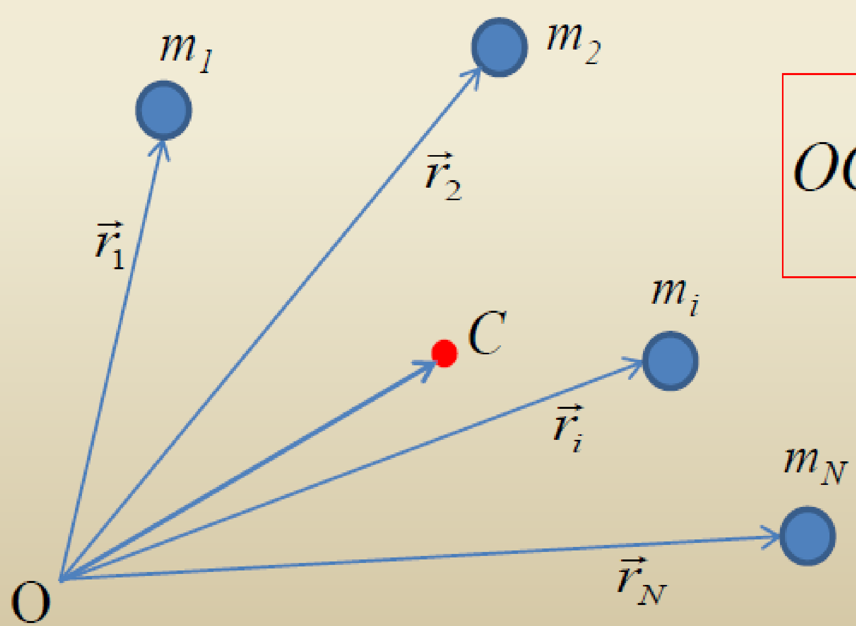


Se non vale più l'approssimazione del punto materiale, ossia abbiamo un corpo esteso la descrizione del problema del moto può diventare **MOLTO** più complicata.

In generale moto traslatorio + rotatorio.

Centro di massa di un sistema materiale





$$\boxed{OC = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \cdots + m_N\vec{r}_N}{m_1 + m_2 + \cdots + m_N} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i}$$

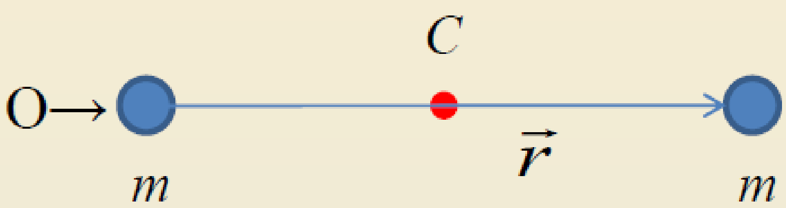
$$M\,\mathrm{OC} = \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i$$

Si definisce **centro di massa** di un sistema di punti il punto che ha coordinate date dalle equazioni precedenti.

Centro di massa di un sistema materiale

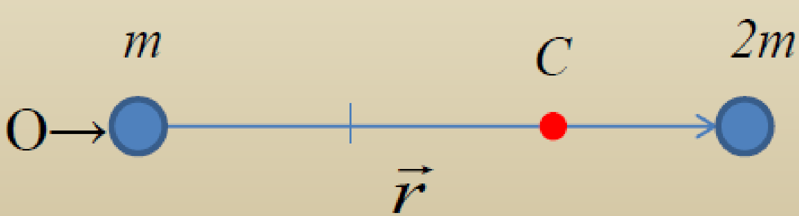
$$\boxed{OC = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \cdots + m_N\vec{r}_N}{m_1 + m_2 + \cdots + m_N}}$$

- 2 punti di uguale massa m



$$OC = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m \cdot 0 + m\vec{r}}{m + m} = \frac{\vec{r}}{2}$$

- due punti di massa m e $2m$



$$OC = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m \cdot 0 + 2m\vec{r}}{m + 2m} = \frac{2}{3}\vec{r}$$

Quantità di moto di un sistema materiale

Somma dei prodotti delle masse dei punti per le rispettive velocità

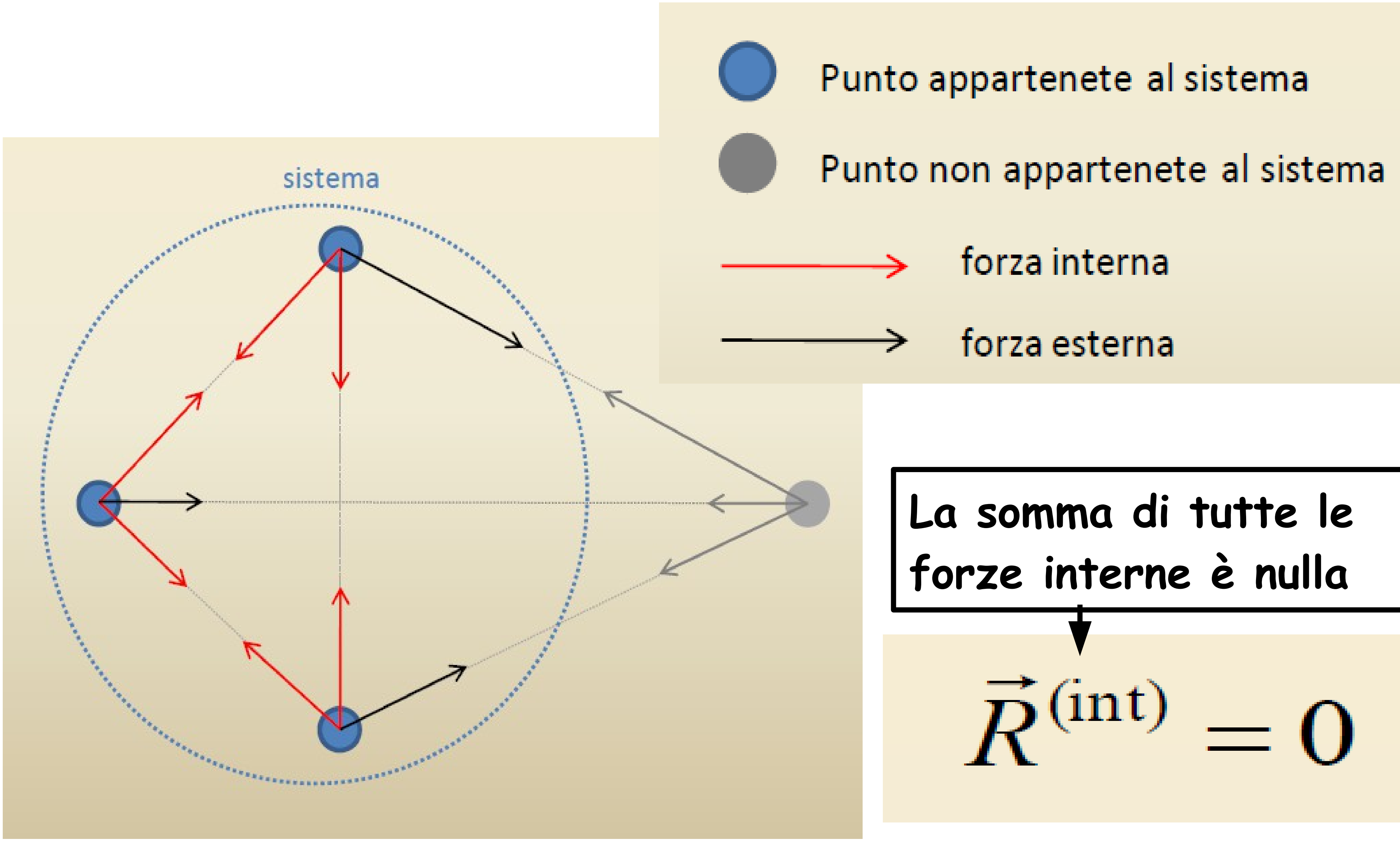
$$\boxed{\vec{Q} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i}$$

$$M\,OC = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \qquad M\vec{v}_C = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i \qquad M\vec{a}_C = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i$$

La quantità di moto di un qualsiasi sistema materiale si può sempre esprimere come il prodotto della massa del sistema per la velocità del centro di massa

$$\boxed{\vec{Q} = M\vec{v}_C} \longrightarrow \frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i = M\vec{a}_C$$

Forze interne e forze esterne al sistema



La somma di tutte le forze interne è nulla

$$\vec{R}^{(\mathrm{int})} = 0$$

Prima equazione cardinale della dinamica dei sistemi

$$m_1\vec{a}_1 = \vec{f}_1^{(\text{int})} + \vec{f}_1^{(est)}$$

$$m_2\vec{a}_2 = \vec{f}_2^{(\text{int})} + \vec{f}_2^{(est)}$$

$$\dots$$

$$m_N\vec{a}_N = \vec{f}_N^{(\text{int})} + \vec{f}_N^{(est)}$$

Seconda equazione della dinamica scritta per ciascun punto del sistema

$\vec{f}_i^{(\text{int})}$ Somma delle forze interne agenti sull'i-esimo punto

$\vec{f}_i^{(est)}$ Somma delle forze esterne agenti sull'i-esimo punto

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{a}_i = \cancel{\vec{R}^{(\text{int})}} + \vec{R}^{(est)}$$

La somma dei primi membri di queste equazioni deve essere uguale alla somma dei secondi membri

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{a}_i = M\vec{a}_C \\ \vec{R}^{(\text{int})} = 0 \end{cases}$$

segue

$$\boxed{M\vec{a}_C = \vec{R}^{(est)}}$$

Principio di conservazione della quantità di moto

Utilizzando al relazione $\frac{d\vec{Q}}{dt} = M\vec{a}_C$ la prima eq. cardinale $M\vec{a}_C = \vec{R}^{(est)}$ si può scrive nella forma

$$\boxed{\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{R}^{(est)}}$$

Teorema della quantità di moto

La derivata rispetto al tempo della quantità di moto di un sistema è uguale alla risultante delle forze esterne agenti sul sistema.

Principio di conservazione della quantità di moto

Se la risultante delle forze esterne agenti su un sistema è nulla, allora la quantità di moto del sistema si conserva costante nel tempo.

Se $\vec{R}^{(est)} = 0$ allora $\vec{Q} = \text{cost.} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_C = \text{cost}$

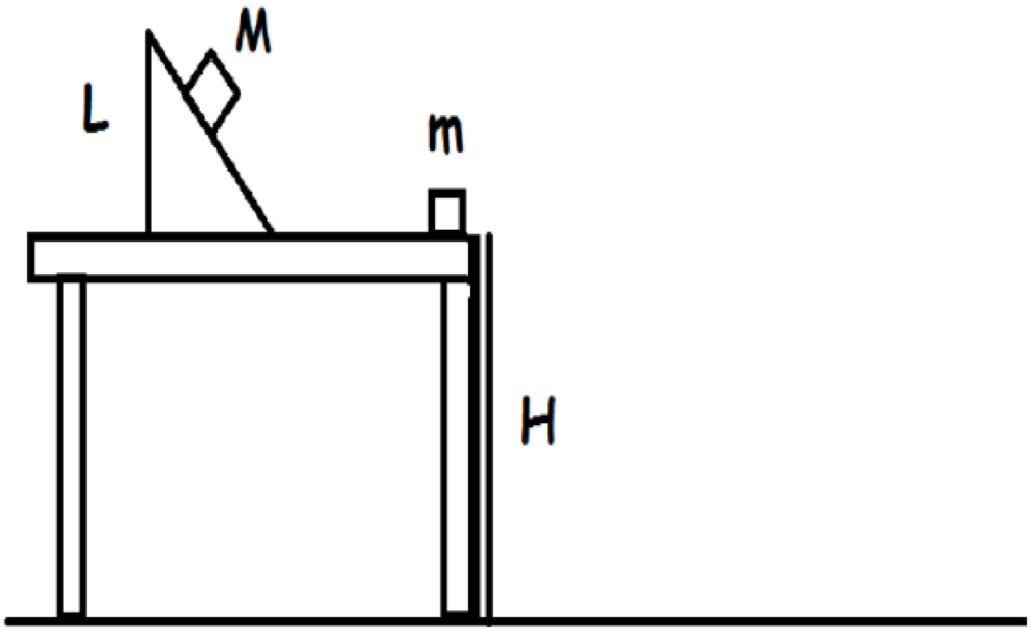
Problema 4:

Un cubo di massa **M** scivola verso il basso lungo un piano inclinato di altezza **H**. Alla fine del piano inclinato si muove orizzontalmente colpendo un altro cubo di massa **m.** Se il moto lungo il piano inclinato avviene senza attrito, e il piano termina ad una altezza H dal suolo,

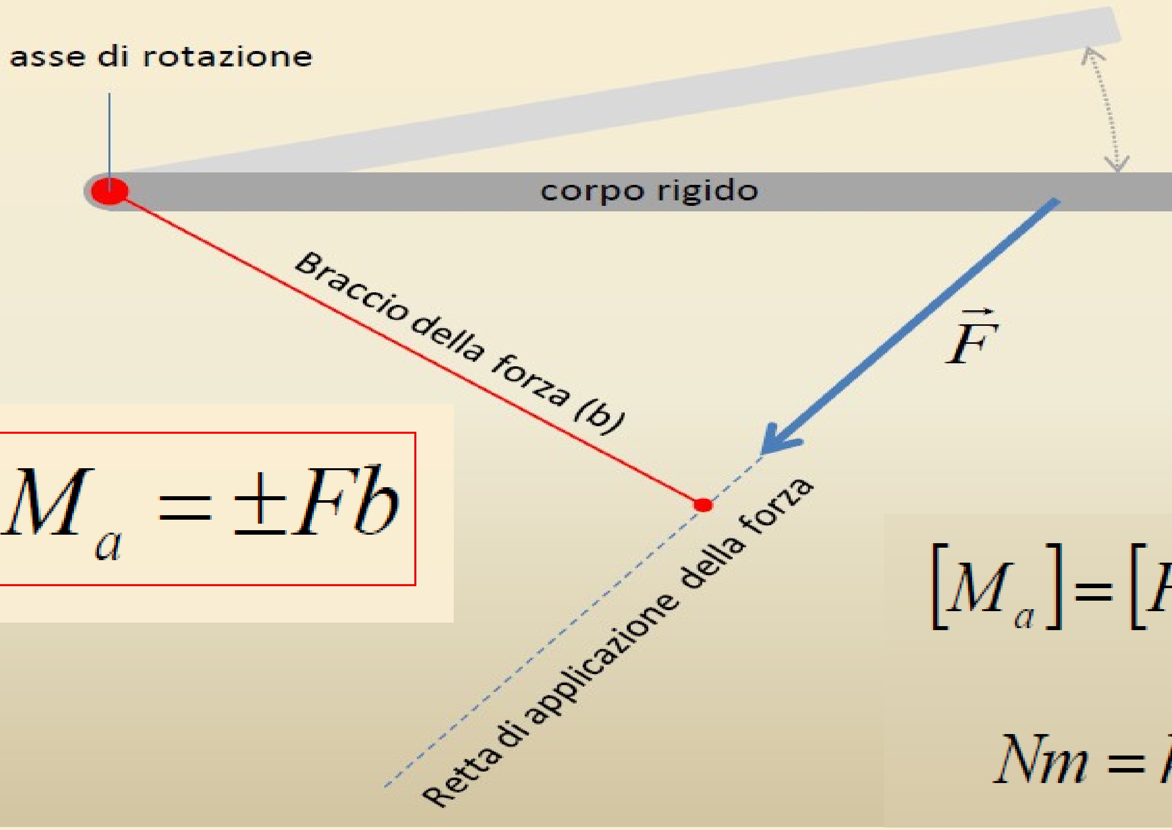
determinare le distanze dal bordo del tavolo in cui i due cubi colpiscono il suolo.

Dati del problema:

M	=	2.0 kg;
m	=	0.5 kg;
L	=	30 cm;
H	=	90 cm;



Momento di una forza



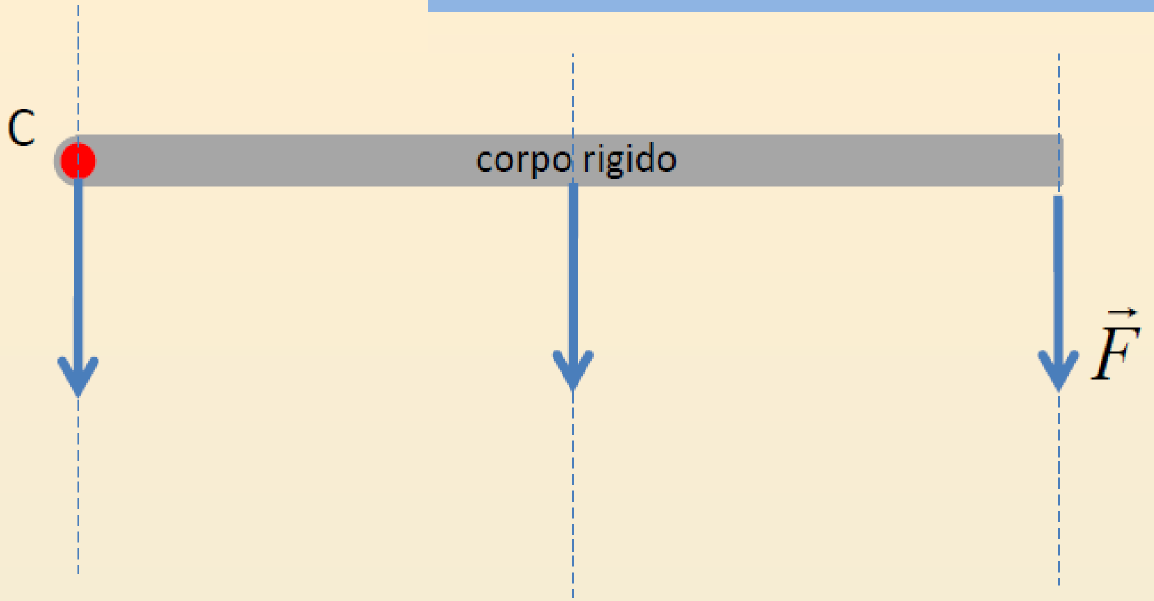
$$\boxed{M_a = \pm Fb}$$

$$[M_a] = [FL] = [MLT^{-2}L] = [ML^2T^{-2}]$$

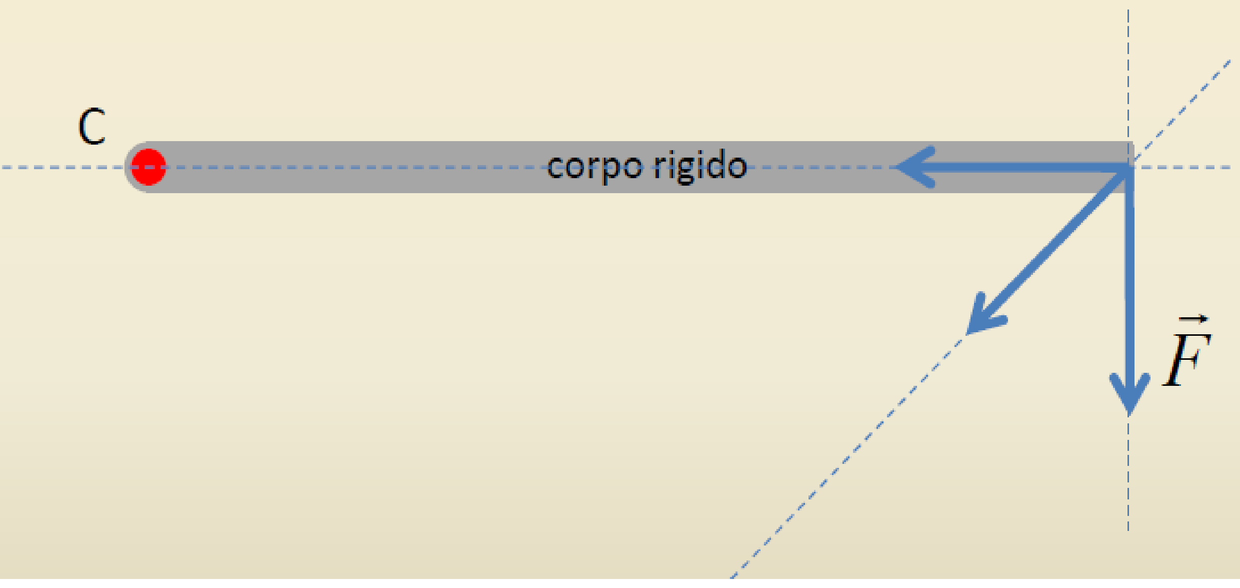
$$Nm = kg\, m^2\, s^{-2}$$

Dato un corpo rigido vincolato a ruotare attorno ad un asse fisso privo di attrito,
e una forza agente sul corpo e appartenente a un piano perpendicolare a tale asse,
si definisce momento della forza rispetto all'asse
il prodotto del modulo della forza per il suo braccio.
Il braccio è la minima distanza fra l'asse e retta di applicazione della forza.

Momento di una forza



Il braccio della forza (ed il momento) aumenta all'aumentare della distanza fra punto di applicazione della forza e centro di rotazione

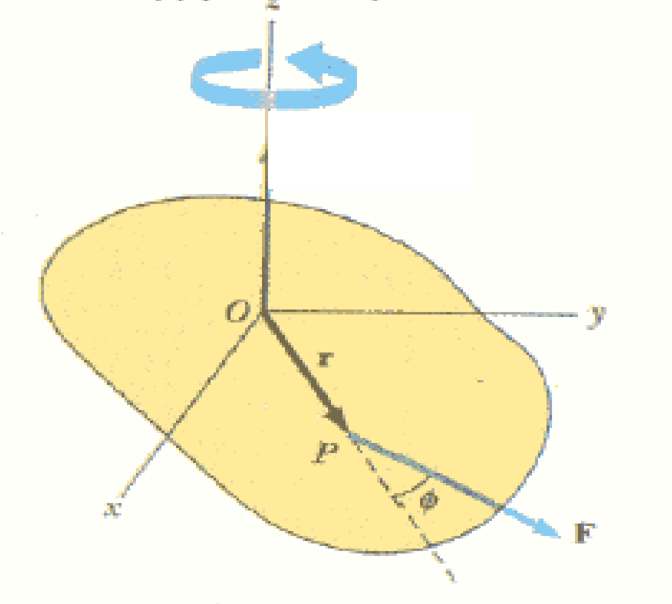


Il braccio della forza (ed il momento) aumenta quanto più la forza è perpendicolare alla retta fra il punto di applicazione della forza e il centro di rotazione

LA STATICA

Momento di una forza ($\vec{M}$): Il momento rispetto al punto arbitrario O di una forza $\vec{F}$ che agisce in un punto P di un corpo rigido (cioe' indeformabile) e' data dal prodotto vettoriale fra $\vec{r}$ (distanza di P da O) ed $\vec{F}$.

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$



Condizione di equilibrio:
nel caso di un sistema rigido devono essere nulle:

- la somma vettoriale di tutte le forze ad esso applicate (equilibrio traslazionale)
- la somma vettoriale dei momenti di tali forze (equilibrio rotazionale)

LE LEVE

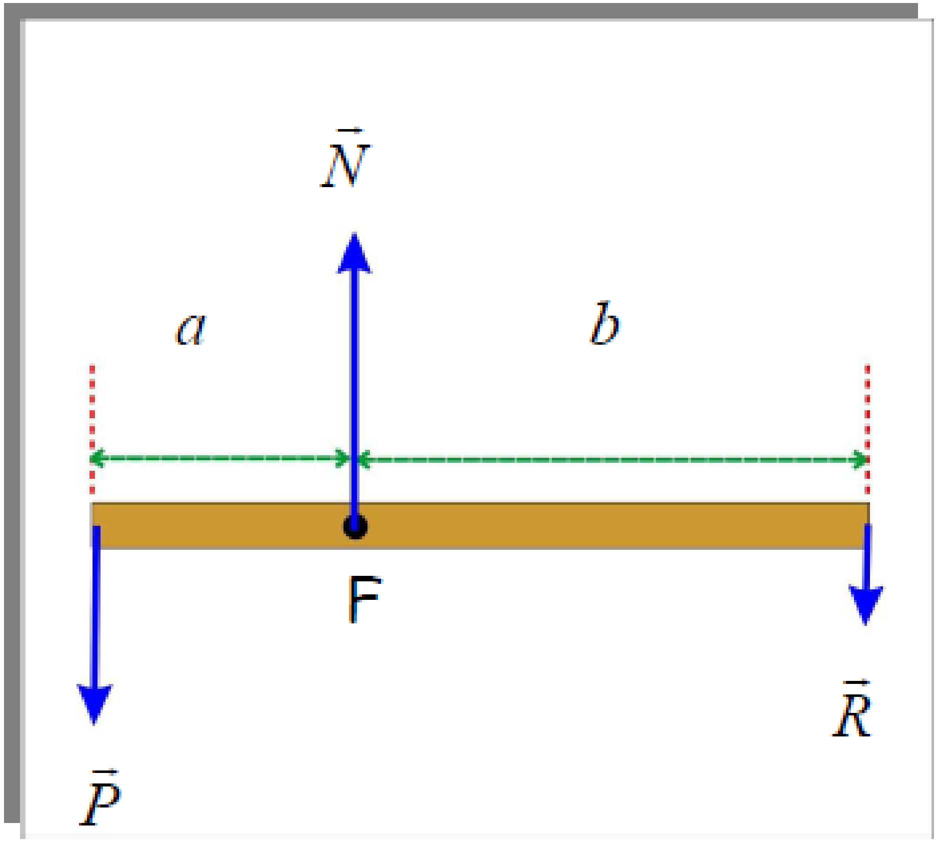
Leva: asta rigida che puo' ruotare attorno ad un asse ad essa perpendicolare detto fulcro sottoposta a 2 forze di cui una e' detta potenza e l'altra resistenza. La condizione di equilibrio e':

1) $\vec{P} + \vec{R} + \vec{N} = 0$

2) $Pa = Rb$

Guadagno :

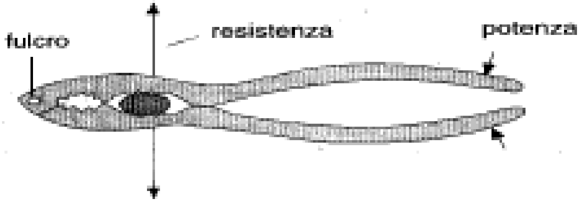
$$G = \frac{R}{P} = \frac{a}{b}$$



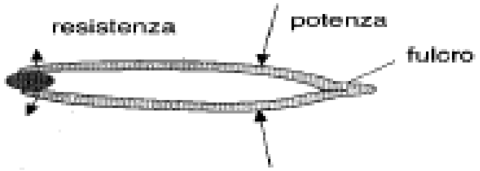
TIPI DI LEVE

Leva di 1° genere: Fulcro intermedio fra potenza e resistenza.
Puo' avere guadagno maggiore, minore o uguale ad 1.
Esempio: pinza

Leva di 2° genere: Resistenza intermedia fra fulcro e potenza.
Ha sempre guadagno maggiore di 1 (vantaggiosa).
Esempio: schiaccianoci

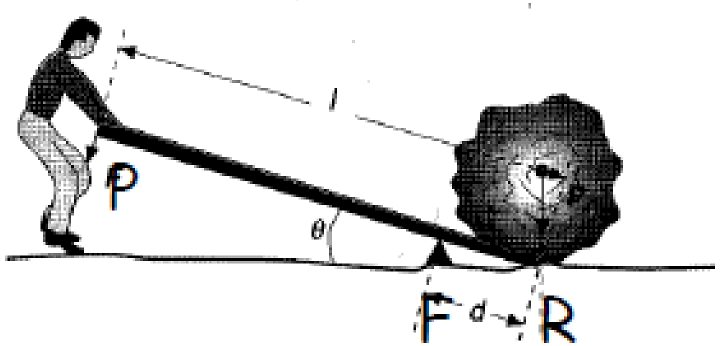


Leva di 3° genere: Potenza intermedia fra fulcro e resistenza.
Ha sempre guadagno minore di 1 (svantaggiosa).
Esempio: pinzette



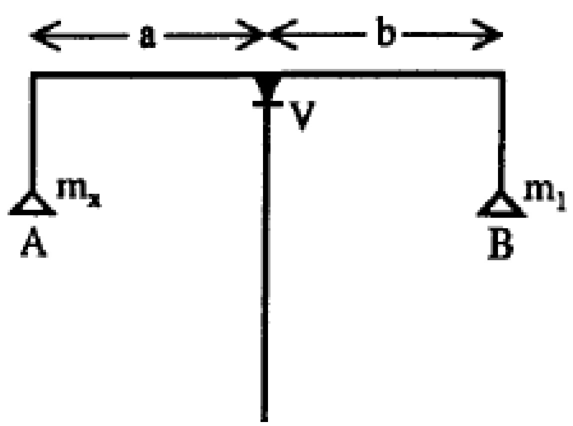
ESEMPI DI LEVE DI 1° GENERE

Asse per sollevare oggetti pesanti

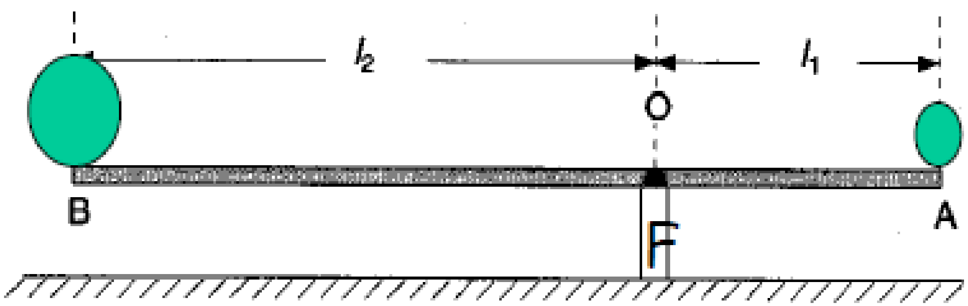


Barca a remi

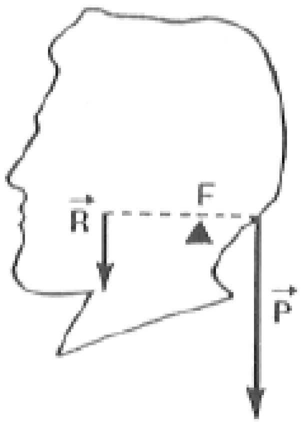
Bilancia



Altalena a bilico



LEVE DEL CORPO UMANO



Articolazione di appoggio della testa:

Leva di 1° genere, in questo caso svantaggiosa.

Fulcro = articolazione

Resistenza = peso (applicato nel baricentro)

Potenza = muscoli splenici

Massa della testa = 8 kg. Forza peso della testa: circa 80 N

Distanza fra il fulcro ed i muscoli splenici: 2 cm

Distanza fra il fulcro e il baricentro della testa: 8 cm

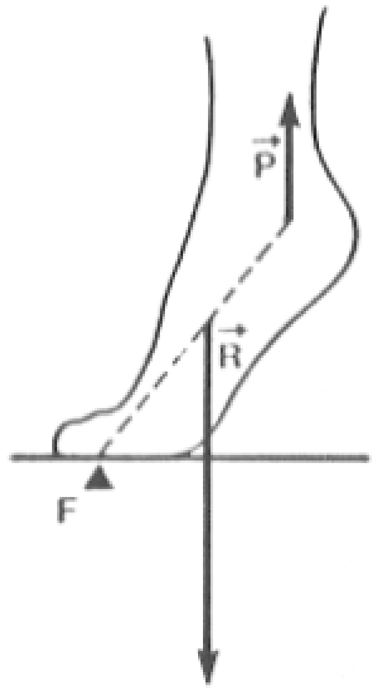
E' una leva svantaggiosa

La forza che deve essere esercitata dai muscoli splenici per tenere la testa in posizione eretta si ricava da:

$F_{splenici} \times 2\text{cm} = 80\text{ N} \times 8\text{ cm}$

$F_{splenici} = 320\text{ N}$, corrispondente a una massa di circa 32 kg

LEVE DEL CORPO UMANO



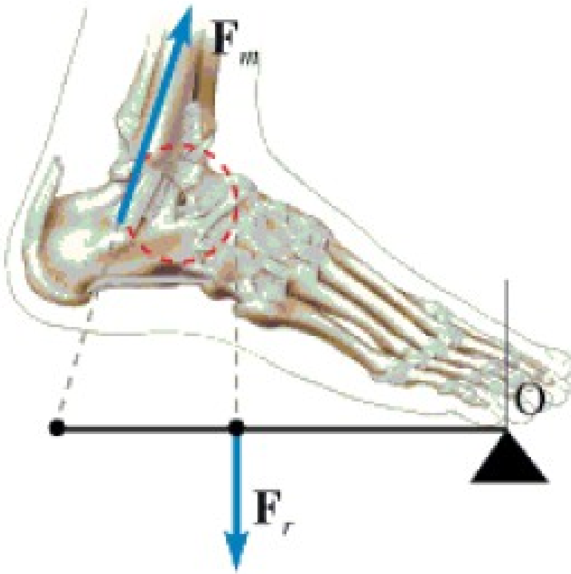
Articolazione del piede in elevazione sulle punte:

Leva di 2° genere, quindi vantaggiosa.

Fulcro = dita.

Resistenza = peso che grava sulla caviglia.

Potenza: muscoli del polpaccio, che esercitano una trazione sul tendine d'Achille.



LEVE DEL CORPO UMANO

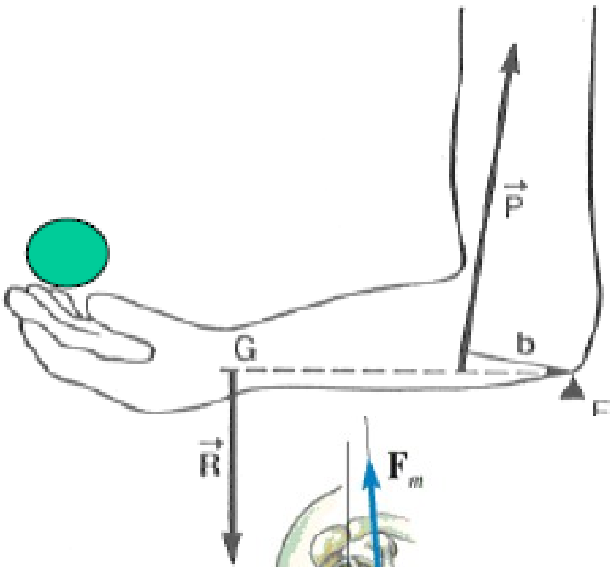
Articolazione del gomito:

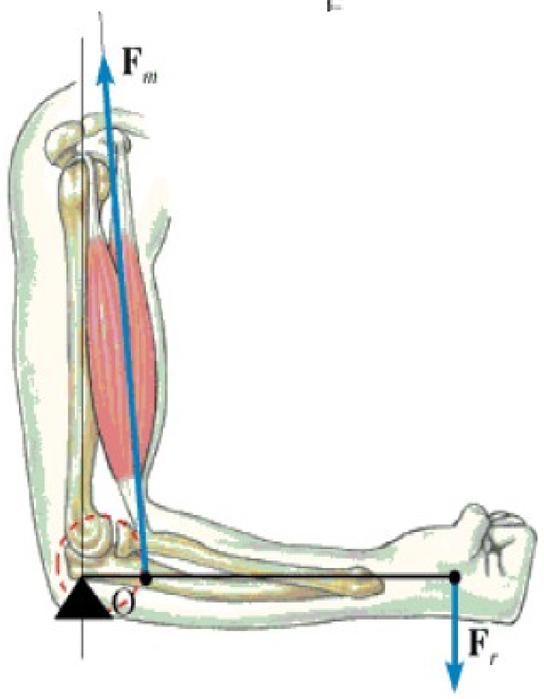
Leva di 3° genere, quindi svantaggiosa.

Fulcro = articolazione.

Resistenza = forza peso dell'avambraccio e dell'eventuale massa sostenuta dalla mano.

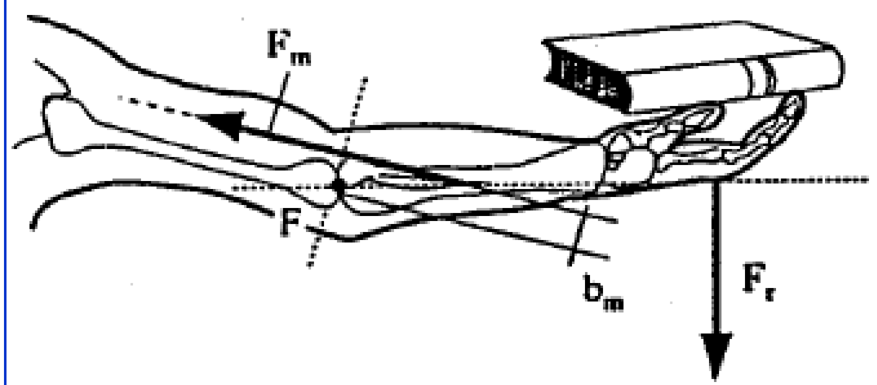
Potenza: Forza esercitata dal bicipite brachiale

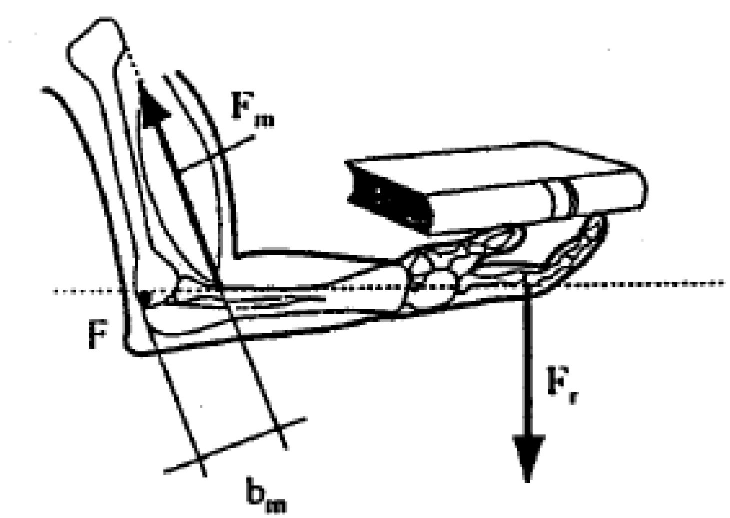




LEVE DEL CORPO UMANO

L'articolazione del gomito col braccio disteso e' piu' svantaggiosa dell'articolazione del gomito col braccio raccolto vicino al tronco poiche' in questo caso si puo' aumentare il braccio della potenza (b_m) e diminuire quello della resistenza.





Momento di inerzia

Definizione

Data un asse a, si definisce momento di inerzia di un sistema rispetto all'asse a, e si indica con il simbolo I_a, la somma dei prodotti delle masse dei punti del sistema per i quadrati delle rispettive distanze dall'asse.

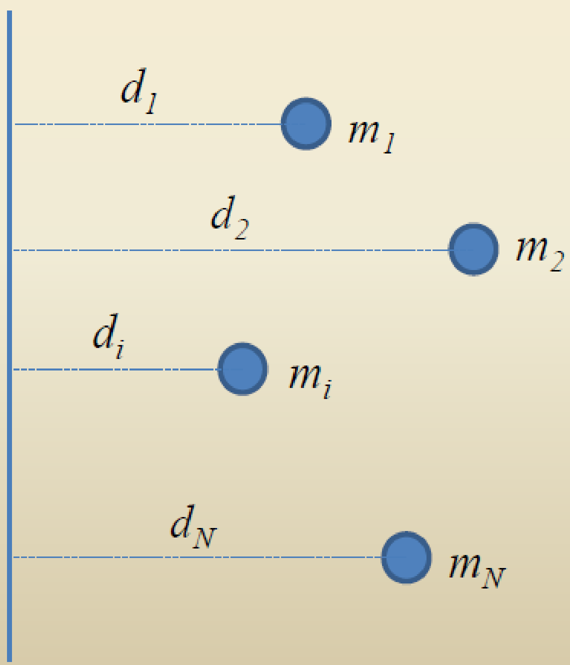
Sistema particellare

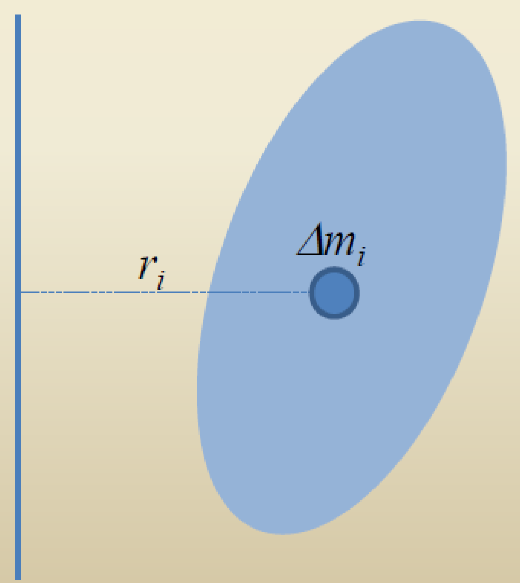
$$I_a = m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2 + \cdots + m_N d_N^2$$

Sistema continuo

$$I_a = \lim_{\Delta m_i \to 0} \left(\Delta m_1 r_1^2 + \Delta m_2 r_2^2 + \cdots + \Delta m_N r_N^2 \right)$$

$$\equiv \int_M r^2 dm$$





Seconda equazione cardinale della dinamica dei sistemi

Grandezze traslazionali				Grandezze rotazionali
massa	m	$\leftrightarrow$	I_a	Momento di inerzia
Accelerazione del centro di massa	$\vec{a}_C$	$\leftrightarrow$	α	Accelerazione angolare

Prima equazione cardinale della dinamica dei sistemi

$$M\vec{a}_C = \vec{R}^{(est)}$$

Seconda equazione cardinale della dinamica dei sistemi

$$I_a \alpha = M_a^{(est)}$$

Quantità di moto

$$\vec{Q} = M\vec{v}_C$$

Momento assiale della quantità di moto

$$L_a = I_a \omega$$

Teorema della quantità di moto

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{R}^{(est)}$$

Teorema del momento della quantità di moto

$$\frac{dL_a}{dt} = M_a^{(est)}$$

Principio di conservazione del momento angolare

$$\frac{dL_a}{dt} = M_a^{(est)} \Rightarrow \boxed{M_a^{est} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{dL_a}{dt} = 0 \;\Rightarrow\; L_a = \text{cost.}}$$

Principio di conservazione del momento assiale della quantità di moto

Se il momento assiale delle forze esterne agenti su un sistema è nullo,
allora il momento assiale della quantità di moto del sistema si conserva costante nel tempo.

Equazioni cardinali della statica dei sistemi

$$\begin{cases} M\vec{a}_C = \vec{R}^{(est)} \\ I_a\alpha = M_a^{(est)} \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{a}_C = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \vec{R}^{(est)} = 0 \\ M_a^{(est)} = 0 \end{cases}$$

CONSERVAZIONI

Le conservazioni dell'energia totale meccanica e quella della quantità di moto, sono due fenomeni sperimentalmente e concettualmente scorrelati.

Esistono fenomeni nei quali si conservano entrambe (*urto elastico*), solamente l'energia totale meccanica (*caduta dei gravi*), solamente la quantità di moto (*urto anelastico*) e nessuna delle due (*scivolamento con attrito*).

Dalla conservazione di una non si può dedurre niente sulla conservazione dell'altra e viceversa.